ಕರ್ನಾಟಕ ಸರಕಾರ

ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಸಾಕ್ಷರತಾ ಇಲಾಖೆ

ಸರಕಾರಿ ಶಿಕ್ಷಕರ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಹಾವಿದ್ಯಾಲಯ (CTE),
ಬೆಳಗಾವಿ

ಪಾಠ ಆಧಾರಿತ ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಸಾಮಗ್ರಿ

2025-26

ಮಾಧ್ಯಮ: ಮರಾಠಿ

ವಿಷಯ :ಗಣಿತ

ತರಗತಿ :9

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಇಲಾಖೆ,

ಬನಶಂಕರಿ ಮೂರನೇ ಹಂತ ಬೆಂಗಳೂರು -560085

ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ

ಶ್ರೀಮತಿ ರಶ್ಮಿ ಮಹೇಶ್. ಭಾ.ಆ.ಸೇ
ಸರಕಾರದ ಪ್ರಧಾನ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು, ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಸಾಕ್ಷರತಾ ಇಲಾಖೆ.

ಡಾ.ತ್ರಿಲೋಕ್ ಚಂದ್ರ ಕೆ.ವಿ ಭಾ.ಆ.ಸೇ ಆಯುಕ್ತರು, ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಸಾಕ್ಷರತಾ ಇಲಾಖೆ, ಬೆಂಗಳೂರು	**ಶ್ರೀ ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ಎಚ್. ಎನ್** ನಿರ್ದೇಶಕರು,ಡಿ.ಎಸ್.ಆರ್.ಟಿ ಬೆಂಗಳೂರು.

ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕರು ಮತ್ತು ಪರಿಶೀಲಕರು

ಶ್ರೀ ಎನ್. ಶ್ರೀಕಂಠ ಪ್ರಾಚಾರ್ಯರು/ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕರು, CTE ಬೆಳಗಾವಿ	**ಶ್ರೀಮತಿ ಬಿ.ಡಿ.ಕಾರದಗೆ** **ಡಾ.ರಾಘವೇಂದ್ರ ಪಿ.ಕೆ** **ಶ್ರೀಮತಿ ಬಿ.ಜೆ ಪೀರಜಾದೆ**

ಅನುವಾದಕ ಸಮೀತಿ

ಶ್ರೀಮತಿ ಎನ್.ಐ .ಶಿಂದೆ ಸರಕಾರಿ ಸರಸ್ವತಿ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಶಹಾಪುರ ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀಮತಿ ಎಸ್.ಎಸ್.ಕುಲಕರ್ಣಿ ಜೀಜಾಮಾತಾ ಗೋಗಟೆ ಬಾಲಕಿಯರ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಬೆಳಗಾವಿ
ಶ್ರೀಮತಿ ಎಂ.ಬಿ.ಅಡಕೆ ಸರಕಾರಿ ಸರದಾರ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀಮತಿ ಬಿ.ಎಂ.ಪಾಟೀಲ ವನಿತಾ ವಿದ್ಯಾಲಯ ಹೈಸ್ಕೂಲ ಬೆಳಗಾವಿ
ಶ್ರೀಮತಿ ಎಚ್.ಎಂ.ಕಿಲ್ಲೇದಾರ ಎಂ.ಎಚ್.ಪಿ.ಎಸ್. ನಂ 7 ಬಾಂದೂರಗಲ್ಲಿ ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀಮತಿ ಎ.ಎಸ್.ಚವ್ಹಾಣ ಎಂ.ಎಂ ಜೀಜಾಮಾತಾ ಹೈಸ್ಕೂಲ ಬೆಳಗಾವಿ
ಶ್ರೀಮತಿ ಎಸ್.ವಿ.ಶಿವನೆ ಸರಕಾರಿ ಚಿಂತಾಮನರಾವ್ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ ಶಹಾಪುರ, ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀಮತಿ ವಂದನಾ ಕಾಮತ ಬೆನೆನಸ್ಮಿತ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ ಬೆಳಗಾವಿ
ಶ್ರೀಮತಿ ಸುಚೇತಾ ಪಾಟೀಲ ಟಿಲಕವಾಡಿ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀ ಅಮೋಲ ಪಾಟೀಲ ಕಂಟೋನಮೆಂಟ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಬೆಳಗಾವಿ
ಶ್ರೀ ಜಿ.ಬಿ.ಪಾಟೀಲ ಮರಾಠಾ ಮಂಡಳ ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ಬೆಳಗಾವಿ	ಶ್ರೀ ಅಮರ ಗುರವ ಭಾರತಿ ವಿದ್ಯಾಲಯ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಬೆಳಗಾವಿ

ಪರಿಶೀಲಕರು: ಶ್ರೀಮತಿ ಎನ್.ಐ .ಶಿಂದೆ, ಸರಕಾರಿ ಸರಸ್ವತಿ ಪ್ರೌಢ ಶಾಲೆ, ಶಹಾಪುರ ಬೆಳಗಾವಿ

शालेय शिक्षण आणि साक्षरता विभाग

सरकारी अध्यापक शिक्षण महाविद्यालय (CTE), बेळगाव

अध्ययन-आधारित मूल्यमापन प्रश्न बँक २०२५-२६

गणित

९ वी

इयत्ता

राज्य शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण विभाग,

बनशंकरी तिसरा टप्पा, बेंगळुरू-५६००८५

संकल्पना आणि मार्गदर्शन

श्रीमती. रश्मी महेश. व्ही, भा.प्र.से.
प्रधान सचिव, शालेय शिक्षण आणि साक्षरता विभाग

डॉ. त्रिलोकचंद्र के. व्ही, भा.प्र.से., आयुक्त, शालेय शिक्षण विभाग	श्री. गोपालकृष्ण एच. एन., संचालक, डी.एस.ई.आर.टी, बेंगलुरु.

समन्वय

श्रीमती. राधा. पी.,
वरिष्ठ सहाय्यक संचालक,
डी.एस.ई.आर.टी., बेंगलुरु

सी.टी.ई. बेळगाव समन्वय

श्री. श्रीकंठ एन., सहसंचालक आणि प्राचार्य सी.टी.ई. बेळगाव	श्रीमती बी. डी. कारदगे डॉ. राघवेंद्र पी. के. श्रीमती बी. जे. पीरजादे

संकल्पना आणि मार्गदर्शन

श्रीमती. रश्मी महेश. व्ही, भा.प्र.से.
प्रधान सचिव, शालेय शिक्षण आणि साक्षरता विभाग

डॉ. त्रिलोकचंद्र के. व्ही, भा.प्र.से., आयुक्त, शालेय शिक्षण विभाग	श्री. गोपाळकृष्ण एच. एन., संचालक, डी.एस.ई.आर.टी, बेंगलुरु.

समन्वय

श्रीमती. राधा. पी.,
वरिष्ठ सहाय्यक संचालक,
डी.एस.ई.आर.टी., बेंगलुरु

सी.टी.ई. बेळगाव समन्वय

श्री. श्रीकांत एन., सहसंचालक आणि प्राचार्य सी.टी.ई. बेळगाव	श्रीमती बी. डी. कराडगे डॉ. राघवेंद्र पी. के. श्रीमती बी. जे. पीरजादे

संसाधन संघ (रिसोर्स टीम)

कुमारी एन. आय. शिंदे, शासकीय सरस्वती कन्या उच्च विद्यालय, शहापूर बेळगाव	श्रीमती एस. एस. कुलकर्णी, उषाताई कन्या उच्च विद्यालय, बेळगाव
श्रीमती एम. बी. आडाके, शासकीय सरदार उच्च विद्यालय, बेळगाव	श्रीमती बी. एम. पाटील, वनिता विद्यालय उच्च विद्यालय, बेळगाव
श्रीमती एच. एम. किल्लेकर, एम.एच.पी.एस. क्र. ७, भांडूर गल्ली, बेळगाव	श्रीमती ए. एस. चव्हाण, एम.एम. चे जिजामाता उच्च विद्यालय, बेळगाव
श्रीमती एस. व्ही. शिवणे, शासकीय चिंतामणराव उच्च विद्यालय, शहापूर बेळगाव	श्रीमती वंदना कामत, बेनियनस्मिथ उच्च विद्यालय, बेळगाव
श्रीमती सुचेता पाटील, टिळकवाडी उच्च विद्यालय, बेळगाव	श्री. अमोल पाटील, कँटोनमेंट उच्च विद्यालय, बेळगाव
श्री. जी. बी. पाटील, मराठा मंडळ उच्च विद्यालय, बेळगाव	श्री. अमर गुरव, भारती विद्यालय, बेळगाव

पुनरावलोकन संघ (रिव्ह्यू टीम)

कुमारी एन. आय. शिंदे,
शासकीय सरस्वती कन्या उच्च विद्यालय, शहापूर बेळगाव

अनुक्रमणिका

प्रकरण - 1 संख्यापद्धती (NUMBER SYSTEM)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक आणि परिमेय संख्या स्मरणात ठेवून, दिलेल्या संख्येचे त्यांपैकी प्रकारात वर्गीकरण करावे हे समजून घेणे.
- दिलेली संख्या परिमेय आहे की नाही हे दाखवण्यासाठी तिला p/q स्वरूपात व्यक्त करणे.
- पायथॅगोरसाचा प्रमेय वापरून पायथॅगोरसची त्रिके तयार करणे आणि दिलेल्या संख्येच्या वर्गमूळाची किंमत काढणे.
- वर्गमूळ असलेल्या छेदाचे परिमेयीकरण करून, परिमेय संख्या असलेल्या पदात रूपांतरित करणे.
- दिलेल्या राशीच्या सरळरूपासाठी घातांकांच्या नियमांचा विस्तार करणे.

अध्ययन अंश (TEACHING POINTS):

- संख्यापद्धतीची ओळख.
- अपरिमेय संख्या.
- वास्तव संख्या आणि त्यांचे दशांश विस्तार.
- वास्तव संख्या संख्यारेषेवर दर्शविणे.
- वास्तव संख्यांसाठी घातांकांच्या नियमांचा वापर.

सोपे (EASY)	मध्यम (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
21	29	04	54

1. **I. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी/अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिलेले आहेत. योग्य पर्याय निवडून त्याचे अक्षर आणि पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे.)** 1.101001000….. हे.,....... संख्येचे उदाहरणआहे. (सोपे)

A) नैसर्गिकसंख्या (Natural number)

B) पूर्णसंख्या (Whole number)

C) परिमेयसंख्या (Rational number)

D) अपरिमेयसंख्या (Irrational number)

2. प्रत्येकपरिमेयसंख्याही.......असते.(सोपे)

A) नैसर्गिकसंख्या (Natural number)

B) वास्तवसंख्या (Real number)

C) पूर्णसंख्या (Whole number)

D) अपरिमेयसंख्या (Irrational number)

3. खालीलपैकीपरिमेयसंख्या (सोपे)

A) √25

B) π

C) 1.232342345........

D) √3

4. खालीलपैकीअपरिमेयसंख्या (सोपे)

A) √49

B) 4/3

C) 5.478

D) √13

5. √2 चा दशांश विस्तार (मध्यम)

A) 1.41414.....

B) 1.41421

C) अखंड आवर्ती (non-terminating recurring)

D) अनंत अनावर्ती (non-terminating non-recurring)

6. दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान (मध्यम)

A) कोणतीहीपरिमेयसंख्यानसते.

B) फक्तएकचपरिमेयसंख्याअसते.

C) अनंतपरिमेयसंख्याअसतात.

D) फक्तएकचपरिमेयसंख्याअसतेआणिकोणतीहीअपरिमेयसंख्यानसते.

7. $\sqrt{6}\times\sqrt{27}$=•••••(मध्यम)

A) 162

B) $9\sqrt{2}$

C) $9\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{2}$

8. $2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ =••••• (सोपे)

A) $2\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{9}$

9. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$चापरिमेयकारकअवयव (Rationalising Factor - R.F) (सोपे)

A) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

B) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{5}$

10. $2-5\sqrt{7}$चापरिमेयकारकअवयव (R.F) (सोपे)

A) $2-5\sqrt{7}$

B) $2+5\sqrt{7}$

C) $2\times5\sqrt{7}$

D) $-3\sqrt{7}$

11. 1/ $\sqrt{3}$ + $\sqrt{2}$छेदाचेपरिमेयीकरण (मध्यम)

A) 1

B) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{5}$

12. $\sqrt{32}$ + $\sqrt{48}$ /$\sqrt{8}+\sqrt{12}$चीकिंमत(मध्यम)

A) $\sqrt{80}/\sqrt{20}$

B) 2

C) 4

D) $\sqrt{2}$

13. $(256)^{1/4}$चीकिंमत (मध्यम)

A) 16

B) 256

C) 4

D) 2

14. 0.6666666…… यासंख्येचे p/q स्वरूप (मध्यम)

A) 0.6

B) 10/3

C) 47/7

D) 2/3

15. ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$)आणि($\sqrt{3}-\sqrt{2}$)यांचागुणाकार (मध्यम)

A) $(3+2\sqrt{2})$

B) $(3-2\sqrt{2})$

C) 1

D) $9+4\sqrt{2}$

16. $m^3 \times m^3$ =•••••••• (सोपे)

A) m^6

B) m^9

C) m^1

D) m^0

17. $10^5 / 2^3 \times 5^3$चीकिंमत (मध्यम)

A) 10

B) 50

C) 100

D) 1000

18. $(ab)^{-2}$चे धनघातांकरूप(मध्यम)

A) $1/a^2b^2$

B) $1/a^{-2}b^{-2}$

C) a^2b^2

D) -2/ ab

19. 1000^0चीकिंमत (सोपे)

A) 1000

B) 100

C) 10

D) 1

20. $\{[(2)^2]^2\}^2$ चीकिंमत (मध्यम)

A) 16

B) 64

C) 256

D) 512

II. खालीलप्रश्नांचीउत्तरेद्या: (एकगुणांचेप्रश्न)

21. परिमेयसंख्येची (rational number) व्याख्यालिहा. (सोपे)
22. अपरिमेयसंख्येची (irrational number) व्याख्यालिहा. (सोपे)
23. अपरिमेयसंख्येचेएकउदाहरणद्या. (सोपे)

24. शून्य(0)हीपरिमेयसंख्याआहेका?

ती p / qच्यास्वरूपातलिहूशकताका? जिथे p आणि q पूर्णांकआणि q = 0 (सोपे)

25. बेरीजकरा: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$आणि$\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (सोपे)
26. $6\sqrt{5}$ला$2\sqrt{5}$नेगुणा. (सोपे)
27. $8\sqrt{15}$ला$2\sqrt{3}$नेभागा.(सोपे)
28. सरळरूप द्या.$(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})$ (मध्यम)
29. सरळरूप द्या.$(3\sqrt{27})2$ (सोपे)$\sqrt[3]{}$ $\sqrt{6}$
30. किंमत काढा. $3\sqrt{64}$(कठीण)
31. किंमत काढा. $64^{1/2}$(सोपे)
32. किंमत काढा. $(32)^{2/5}$(सोपे)

III. खालीलप्रश्नांचीउत्तरेद्या: (दोनगुणांचेप्रश्न)

33. 1 आणि 2 मधीलचार परिमेयसंख्याशोधा. (सोपे)

34. खालीलसंख्यांचेपरिमेयकिंवाअपरिमेयसंख्यामध्येवर्गीकरणकरा. (सोपे)

(i) $2\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{225}$

(iii) 1.101001000100001...

(iv) 7.478478...

35. 0.333333…….हे p/q

यास्वरूपातमांडा. (मध्यम)

36. 0.99999…….हेp/qयास्वरूपातमांडा. (मध्यम)
37. 0.121212…….हेp/q या स्वरूपातमांडा. (मध्यम)
38. 2.123123123…….हेp/q यास्वरूपातमांडा. (मध्यम)
39. 1.27हेp/q यास्वरूपातमांडा. (मध्यम)
40. बेरीजकरा: $5\sqrt{x}+7\sqrt{y}$, $12\sqrt{x}-9\sqrt{y}$आणि$-8\sqrt{x}+3\sqrt{y}$ (मध्यम)
41. किंमत काढा. $\sqrt{128}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$ (कठीण)
42. 1/7 आणि 2/7 मधीलअपरिमेयसंख्याशोधा. (मध्यम)

42. सरळरूप द्या. $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$ (मध्यम)
43. सरळरूप द्या. $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$ (मध्यम)

IV. खालीलप्रश्नांचीउत्तरेद्या: (तीनगुणांचेप्रश्न)

45. संख्यारेषेवर$\sqrt{2}$चेस्थानदर्शवा. (मध्यम)
46. संख्यारेषेवर$\sqrt{3}$चे स्थान दर्शवा. (मध्यम)
47. संख्यारेषेवर$\sqrt{5}$चे स्थान दर्शवा. (कठीण)
48. खालीलचीकिंमतशोधा:

(i) (9)3/2

(ii) $(125)^{2/5}$

(iii) $(16)^{3/4}$ (मध्यम)

49. 1/7 + $3\sqrt{2}$छेदाचेपरिमेयीकरण करून सरळरूप द्या.(मध्यम)

$\sqrt{5}$ +$\sqrt{3}$/$\sqrt{5}$ - $\sqrt{3}$ छेदाचे परिमेयकरण करून सरळ रूप द्या.(मध्यम)

50. खालीलसंख्यादशांशरूपातलिहाआणित्यांचेप्रकारसांगा:

(i) 36/100

(ii) 1/11

(iii) $4\frac{1}{8}$(मध्यम)

V. खालीलप्रश्नांचीउत्तरेद्या (चारगुणांचेप्रश्न)

52. संख्यारेषेवर√9.3दाखवा. (कठीण)
53. खालीलविधाने 'सत्य' किंवा 'असत्य' आहेततेसांगा. तुमच्याउत्तराचीकारणेद्या.

(i) प्रत्येकनैसर्गिकसंख्याहीपूर्णसंख्याअसते. (मध्यम)

(ii) प्रत्येकपूर्णांकहीपूर्णसंख्याअसते.

(iii) प्रत्येकअपरिमेयसंख्याहीनैसर्गिकसंख्याअसते.

(iv) सर्वधनपूर्णांकसंख्यांचेवर्गमुळअपरिमेयसंख्याअसते.

V. खालीलप्रश्नांचीउत्तरेद्या (पाचगुणांचेप्रश्न)

54. घातांकांचेसर्वनियमलिहा. (मध्यम)

उत्तरसूची

प्रकरण-१संख्यापद्धती

I. बहुपर्यायीप्रश्न

1. D) अपरिमेयसंख्या

2. B) वास्तवसंख्या

3. A) $\sqrt{25}$

4. D) $\sqrt{13}$

5. D) अनंतअनावर्ती

6. C) अनंतपरिमेयसंख्याअसतात.

7. B) $9\sqrt{2}$

8. C) $3\sqrt{3}$

9. A) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

10. B) $2 + 5\sqrt{7}$

11. C) $1/\sqrt{3} - \sqrt{2}$

12. B) 2

13. C) 4

14. D) 2/3

15. C) 1

16. A) m^6

17. C) 100

18. A) $1/a^2b^2$

19. D) 1

20. C) 256

II. एकगुणांचेप्रश्न

21. परिमेयसंख्या: ज्यासंख्या p/q स्वरूपातमांडतायेतात, जिथे p आणि q पूर्णांकआणि$q \neq 0$अशा संख्यांनापरिमेयसंख्याम्हणतात.

22. अपरिमेयसंख्या: ज्यासंख्या p/qस्वरूपातमांडतायेतनाहीत.अशा संख्यांनाअपरिमेयसंख्याम्हणतात.

23. √३, π

24. शून्य(0)हीपरिमेयसंख्याआहेका? ती p/qस्वरूपातलिहितायेते. का?

होय. शून्य(0)हीपरिमेयसंख्याआहे.

ती0/1 असेलिहितायेते, जिथे p=0 आणि q=1 हेदोन्हीपूर्णांकआहेतआणि q□=0.

25. बेरीजकरा: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$आणि$\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$=(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=(2+1)\sqrt{2}+(5-1)\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

26. $6\sqrt{5}$ला $2\sqrt{5}$नेगुणा.

$=(6\sqrt{5})(2\sqrt{5})$

$=6\times2\sqrt{5}\times5$

$=12\times5$

$=60$

27. $8\sqrt{15}$ला $2\sqrt{3}$नेभागा.

$=8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$

$= 8\sqrt{5 \times 3} \div 2\sqrt{3}$

$=8\sqrt{5} \times \sqrt{3} \div 2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{5}$

28. सरळरूप द्या. $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})$

हे $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$यासूत्रानेसोडवतायेते.

$= (\sqrt{11})^2-(\sqrt{7})^2$

$=11-7$

$= 4$

29. सरळरूप द्या: $(27)^2$

$= (3)^2$

$= 9$

(टीप: तुमच्यामूळउत्तरामध्येदिलेलीपायऱ्यावेगळ्यागणिताचीआहेत, म्हणजेच $(327)^2$साठी.)

30. किंमतशोधा: $3\sqrt{64}$

$= 8$

$=2$

(टीप: तुमच्यामूळउत्तरामध्ये 364दिलेआहे, पणप्रश्नात 364असेआहे.)

31. किंमतशोधा: $64^{1/2}$

$=64^{1/2}$

$=8$

(टीप: तुमच्यामूळउत्तरामध्ये $64^{1/2}$दिलेआहे. प्रश्नामध्ये $64^{1/3}$असेहोते. प्रश्नातील $64^{1/3}$साठीउत्तर4येईल. आणि $64^{1/2}$साठी 8.)

32. किंमतशोधा: $(32)^{2/5}$

$=(25)^{2/5}$

$= (2)^{5\times 2/5}$

$= (2)^2$

$= 4$

(टीप: तुमच्यामूळउत्तरामध्ये(32)2/5 साठी 22=4 दिलेआहे, जेचुकीचेआहे. 3252साठीउत्तर 4 येते. मीप्रश्नातील 3251साठीयोग्यउत्तरदिलेआहे.)

III. दोनगुणांचेप्रश्न

33. 1आणि2मधीलचारपरिमेयसंख्याशोध.

पायरी 1: 4 + 1 = 5

पायरी 2: 1 ला5नेगुणूनआणिभागून.

=1×5/5=5/5

पायरी 3: 2ला5 नेगुणूनआणिभागून.

=2×5/5=5/10

म्हणून 1आणि2मधील चारपरिमेयसंख्याआहेत.

6/5, 7/5, 8/5, 9/5

34. खालीलसंख्यांचेपरिमेयआणिअपरिमेयसंख्येतवर्गीकरणकरा.

- परिमेयसंख्या (Rational numbers):√225, 7.478478...
- अपरिमेयसंख्या (Irrational numbers):√23, 1.101001000100001...

---

35. 0.333333……. ला p/qया स्वरूपातमांडा.

समजा x=0.333333333... ....(1)

समीकरण (1) ला10नेगुणल्यास,

10x=3.33333333... ....(२)

समीकरण (2) मधूनसमीकरण (1) वजाकेल्यास,

10x−x=3.33333333...- 0.33333333...

9x=3

x=3/9

x=1/3

म्हणूनया संख्येचे 0.333333……=1/3

---

36. 0.999999……. ला p/qस्वरूपातमांडा.

समजाx=0.999999... ....(1)

(समीकरण (1) ला10 नेगुणल्यास,

10x=9.999999... ....(2)

समीकरण (2) मधूनसमीकरण (1) वजाकेल्यास,

10x−x=9.999999...−0.999999...

9x= 9

x=9/9

x=1

म्हणून 0.999999……= 1

---

37. 0.121212……. ला p/qस्वरूपातमांडा.

समजाx=0.121212… ....(1)

समीकरण (1) ला100नेगुणल्यास,

100x=12.1212….............(2)

समीकरण (2) मधूनसमीकरण (1) वजाकेल्यास,

100x−x=12.1212…−0.1212…

99x=12

x=12/99

x= 4/33

म्हणून 0.121212……=4/33

38. 2.123123123……. ला p/qस्वरूपातमांडा.

समजा. x=2.123123123… ....(1)

समीकरण (1) ला1000नेगुणल्यास,

1000x=2123.123123… ....(2)

समीकरण (2) मधूनसमीकरण (1) वजाकेल्यास,

1000x -x=2123.123123…−2.123123…

999x=2121

x=2121/999

x=707/333

म्हणून 2.123123123……=707/333

---

39. 1.272727……. ला p/qच्यास्वरूपातमांडा.

समजा   x =1.272727… ....(1)

समीकरण (1) ला100नेगुणल्यास,

100x=127.2727… ....(2)

समीकरण (2) मधूनसमीकरण (1) वजाकेल्यास,

100x−x=127.2727…−1.2727…

99x=126

x=126/99

x= 42/33

x = 14/11

म्हणून 1.272727……=14/11

---

40. $5\sqrt{x}+7\sqrt{y}$, $12\sqrt{x}-9\sqrt{y}$आणि $8\sqrt{x}+3\sqrt{y}$यांची बेरीजकरा.

सजातीयपदेएकत्रआणल्यास:

$(5\sqrt{x}+12\sqrt{x}-8\pi x)+(7\sqrt{y}-9\sqrt{y}+3\sqrt{y})$

$=(5+12-8)\sqrt{x}+(7-9+3)\sqrt{y}$

$=(17-8)\sqrt{x}+(-2+3)\sqrt{y}$

$=9\sqrt{x}+\sqrt{y}$

---

41. किंमत काढा. $\sqrt{128}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$

$=\sqrt{64\times2}+\sqrt{25}\times\sqrt{2}-\sqrt{49\times2}$

$= 8\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

$=(8+5-7)\sqrt{2}$

$=6\sqrt{2}$

---

42. 1/7आणि 2/7मधीलएकअपरिमेयसंख्याशोधा.

1/7 =0.142857...

2/7 =0.285714...

1/7आणि 2/7 मधील एकअपरिमेयसंख्याआहे: 0.202122232425… (अशाअनेकसंख्याअसूशकतात.)

---

43. सोपेकरा: $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

हे $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ यास्वरूपातआहे.

$(\sqrt{3}+\sqrt{7})2$

$=(\sqrt{3})2+(\sqrt{7})2+2(\sqrt{3})(\sqrt{7})$

$=3+7+2\sqrt{21}$

$=10+2\sqrt{21}$

---

44. **सरळरूप द्या.** $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

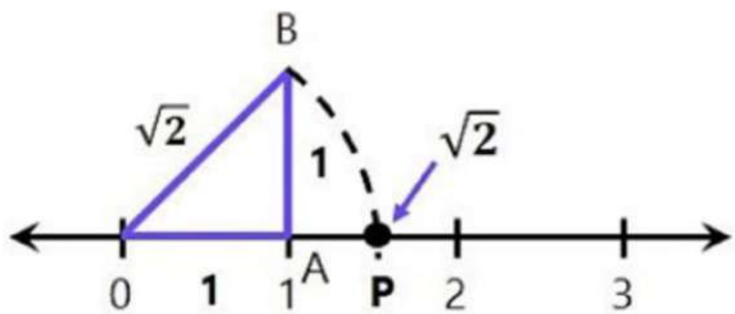
$=3(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}(2+\sqrt{2})$

$=(3\times2)+(3\times\sqrt{2})+(\sqrt{3}\times2)+(\sqrt{3}\times\sqrt{2})$

$=6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

IV. तीनगुणांचेप्रश्न (Three Marks Questions)

45. संख्यारेषेवर$\sqrt{2}$चे स्थान दर्शवा.



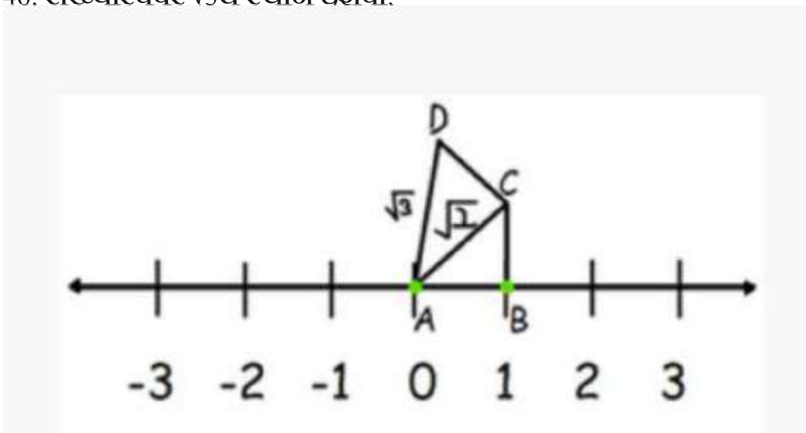
$\sqrt{2}$संख्यारेषेवरदर्शवण्यासाठी:

आपण$\sqrt{२}$लादोनसंख्यांच्यावर्गांचीबेरीजम्हणूनमांडूशकतो.

म्हणून, 2= (1)2+ (1)2

⇒($\sqrt{2}$)2=(1)2+ (1)2

46. संख्यारेषेवर√3चे स्थान दर्शवा.



प्रथम√2संख्यारेषेवरदर्शविणे (मागीलप्रश्नाप्रमाणे).

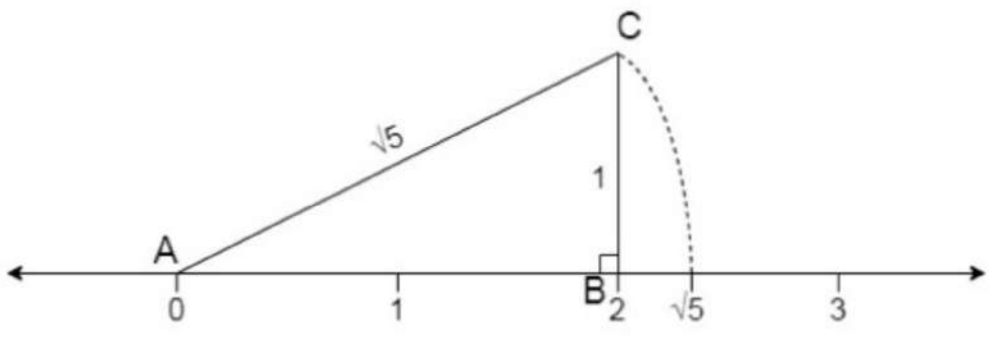
आपल्यालामाहीतआहेकी

3 = (√3)2=(√2)2+ (1)2.

- संख्यारेषेवरबिंदू 'O' (शून्य) पासून 'A' (1 एकक) पर्यंत 1 एककअंतरघ्या.
- A बिंदूवर90°चाकोनकरून 1 एककलांबीचा AB रेषाखंडकाढा. (जसे√2साठीकरतो.)
- OB लाजोडा. **OB चीलांबी√2असेल.**
- आता, B बिंदूवर90°चाकोनकरून BD हा 1 एककलांबीचारेषाखंडकाढा. (OB वरलंब).
- OD लाजोडा. पायथागोरसच्याप्रमेयानुसार, OD2=OB2+BD2=(√2)2+(1)2=2+1=3.
- म्हणून, **OD चीलांबी√3असेल.**
- आता, O केंद्रघेऊनआणि OD त्रिज्याघेऊनएककंसकाढाजोसंख्यारेषेलाज्याबिंदूतछेदतो, तोबिंदू√3 दर्शवितो.

---

47. संख्यारेषेवर√5चे स्थान दर्शवा.



√5संख्यारेषेवरदर्शविण्यासाठी:

- आपण5 लादोनसंख्यांच्यावर्गांचीबेरीजम्हणूनमांडूशकतो.
- 5= (2)2+ (1)2
- म्हणून, (√5)2= (2)2+ (1)2
- संख्यारेषेवरबिंदू 'O' (शून्य) पासून 'A' (2 एकक) पर्यंत 2 एककअंतरघ्या.
- A बिंदूवर90°चाकोनकरून AB हा 1 एककलांबीचारेषाखंडकाढा.
- OB लाजोडा. पायथागोरसच्याप्रमेयानुसार, OB2=OA2+AB2=22+12=4+1=5.
- म्हणून, **OB चीलांबी**√5**असेल.**
- आता, O केंद्रघेऊनआणि OB त्रिज्याघेऊनएककंसकाढाजोसंख्यारेषेलाज्याबिंदूतछेदतो, तोबिंदू√5 दर्शवितो.

---

48. किंमतशोधा.

(i) $(9)^{3/2}$

$= [(3)2]^{3/2}$

$= (3)^{2\times3/2}$

=33

=27

(ii) $(125)^{1/3}$

$= [(5)3]^{1/3}$

$= (5)^{3\times1/3}$

=51

=5

(iii) $(16)^{3/4}$

$= [(2)4]^{3/4}$

$= (2)^{4\times3/4}$

=23

=8

49. छेदाचेपरिमेयीकरणकरून सरळ रूप द्या.

$$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$$

$=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ x $\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$

=7- 3$\sqrt{2}$ / 72-(3$\sqrt{2}$)2

=7- 3$\sqrt{2}$ /49 -9x2

==7- 3$\sqrt{2}$ /31

---

50. छेदाचे परिमेयकरण करून सरळ रूप द्या.

$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

=

$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}x\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

=($\sqrt{5}+\sqrt{3}$)2 /($\sqrt{5}$)2 – ($\sqrt{3}$)2

=5 +3 +$\sqrt{15}$ /5 -3

==8 +$\sqrt{15}$ / 2

=2 (4 + $\sqrt{15}$ / 2

= 4 + $\sqrt{15}$

51. खालीलसंख्यादशांशरूपातलिहाआणि त्यांचेप्रकारसांगा:

(i) 36/100

36/100 =0.36

हासांतदशांशविस्तार (terminating decimal expansion) आहे.

(ii) 1/11

1/11=0.090909...=0.09

हाअखंडआवर्तीदशांशविस्तार (non-terminating recu4rring decimal expansion) आहे.

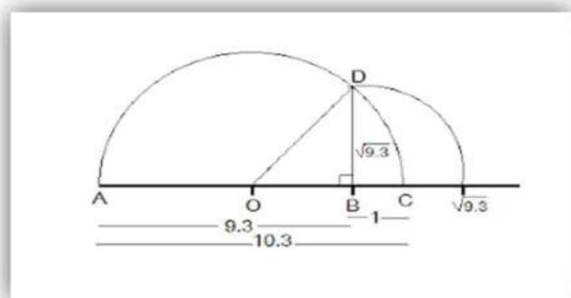
(iii) $4\frac{1}{8}$

$4\frac{1}{8} = \frac{33}{8} = 4.125$

हासांतदशांशविस्तार (terminating decimal expansion) आहे.

V. चारगुणांचेप्रश्न (Four Marks Questions)

52. संख्यारेषेवर√9.3दर्शवा.



पायथॅगोरसाचाप्रमेयवापरूनसंख्यारेषेवर√9.3दर्शविण्यासाठी, पुढीलपायऱ्याकरा:

1. **रेषाखंड AB काढा:**9.3एककलांबीचाएकरेषाखंड AB काढा.
2. **रेषाखंड BC वाढवा:** B बिंदूपासून 1 एककलांबीचारेषाखंडवाढवून C बिंदूमिळवा. (आता AC चीएकूणलांबी9.3+1=10.3एककआहे.)
3. **मध्यबिंदू O शोधा:** AC चामध्यबिंदू O शोधा.

4. **अर्धवर्तुळकाढा:** O केंद्रघेऊनआणि OC (किंवा OA) त्रिज्याघेऊनएकअर्धवर्तुळ (semicircle) काढा.
5. **लंबकाढा:** B बिंदूतून AC वरलंब (perpendicular) काढा. हालंबअर्धवर्तुळालाज्याबिंदूतछेदेल, त्यालाDनावद्या. **BD चीलांबी**√9.3**असेल.**
6. **संख्यारेषेवरदर्शवा:** B केंद्रघेऊनआणि BD त्रिज्याघेऊनएककंस (arc) काढा, जोसंख्यारेषेला (जी AC च्यालांबीचाभागआहे) E बिंदूतछेदेल. **E बिंदू**√9.3**दर्शवितो.**

53. खालीलविधाने 'सत्य' किंवा 'असत्य' आहेततेसांगा. तुमच्याउत्तरांचीकारणेद्या.

(i) प्रत्येकनैसर्गिकसंख्याहीपूर्णसंख्याअसते.

सत्य. कारणनैसर्गिकसंख्यांचासट {1,2,3,...} हापूर्णसंख्यांच्यासटामध्ये{0,1,2,3,...} समाविष्टआहे.

(ii) प्रत्येकपूर्णांकहीपूर्णसंख्याअसते.

असत्य. कारणपूर्णांकांमध्येऋणसंख्या (उदा. −1,−2...) असतात, तरपूर्णसंख्यांमध्येफक्तशून्यआणिधनपूर्णांकअसतात.

(iii) प्रत्येकअपरिमेयसंख्याहीनैसर्गिकसंख्याअसते.

असत्य. कारणनैसर्गिकसंख्यायाधनपूर्णांकअसतात (उदा. 1,2,3...), तरअपरिमेयसंख्या (उदा. √2,π....) याअशावास्तवसंख्याआहेतज्यांनाअपूर्णांकाच्यास्वरूपातमांडतायेतनाही.

(iv) सर्वधनपूर्णांकांचीवर्गमुळेअपरिमेयसंख्याअसतात.

असत्य. कारणकाहीधनपूर्णांकांचीवर्गमुळेपरिमेयसंख्याअसतात (उदा. √4=2, √9=3, √25=5).

VI. पाचगुणांचेप्रश्न (Five Marks Questions)

५४. घातांकांचेसर्वनियमलिहा.

घातांकांचेनियमखालीलप्रमाणेआहेत:

- गुणाकाराचानियम: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) भागाकाराचानियम: $a^n / a^m = a^{m-n}$

c) गुणाकाराचाघातांक (Power of a Product): $(ab)^m = a^m \times b^m$

d) भागाकाराचाघातांक (Power of a Quotient): $(a/b)^m = a^m / b^m$

e) घातांकाचाघातांक (Power of a Power): $(a^m)^n = a^{mn}$

f) शून्यघातांक (Zero Exponent): $a^0 = 1$ (जेव्हा a□=0)

g) ऋणघातांक (Negative Exponent): $a^{-m} = 1 / a^m$

प्रकरण – २ बहुपदी (POLYNOMIALS)

शिकण्याचे उद्दिष्ट्य (Learning Outcome):

बीजगणितीय अभिव्यक्तींमधून बहुपदी ओळखतो/वर्गीकरण करतो आणि योग्य बीजगणितीय नित्यसमीकरणे (algebraic identities) वापरून त्यांचे अवयवीकरण (factorise) करतो.

शिकवण्याचे मुद्दे (Teaching Points):

- बहुपदीचा अर्थ आणि प्रकार (Meaning and types of a Polynomial)
- बहुपदीची शून्ये (Zeroes of a Polynomial)
- शेष प्रमेय (Remainder Theorem)
- बहुपदीचे अवयवीकरण (Factorisation of a Polynomial)
- नित्यसमीकरणे सिद्ध करणे (Proving Identities)

सोपे (EASY)	मध्यम (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
28	30	08	66

I. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी/अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडून त्याचे अक्षर आणि पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. खालीलपैकी रेषीय बहुपदीचे उदाहरण कोणते आहे? (सोपे)

   A) $4x^2+2x-1$

   B) $x^{-2}-1$

   C) $y+y^2$

   D) $5y+1=0$

2. $9x^2+4x-6$ मध्ये x^2 चा सहगुणक (coefficient) कोणता आहे? (सोपे)

   A) 2

   B) 3

   C) 6

   D) 9

3. 1 कोटी असलेल्या बहुपदीला काय म्हणतात? (सोपे)

A) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

B) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

C) एकपदी (Monomial)

D) द्विपदी (Binomial)

4. 2 कोटी असलेल्या बहुपदीला काय म्हणतात? (सोपे)

A) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

B) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

C) एकपदी (Monomial)

D) द्विपदी (Binomial)

5. 3 कोटी असलेल्या बहुपदीला काय म्हणतात? (सोपे)

A) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

B) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

C) घन बहुपदी (Cubic Polynomial)

D) त्रिपदी (Trinomial)

6. $x+2$ हे कशाचे उदाहरण आहे? (सोपे)

A) स्थिर बहुपदी (Constant polynomial)

B) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

C) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

D) घन बहुपदी (Cubic polynomial)

7. $y^2+2y-15$ हे कशाचे उदाहरण आहे? (सोपे)

A) स्थिर बहुपदी (Constant polynomial)

B) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

C) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

D) घन बहुपदी (Cubic polynomial)

8. तीन पदे असलेली एक चलातील बहुपदी कोणती आहे? (मध्यम)

A) x^2+2x+4

B) (3xy)

C) 2x+3y+5z

D) x3

9. खालीलपैकी रेषीय बहुपदी कोणती आहे? (सोपे)

A) 2x+5

B) $2x^2+5x+6$

C) $3x^3-bx^2+5x+7$

D) $8x^{-2}+6x+4$

10. खालीलपैकी वर्ग बहुपदी कोणती आहे? (मध्यम)

A) ax+b

B) ax^2+bx+c

C) ax^3+bx^2+cx+d

D) $ax^{-2}+bx+c$

11. बहुपदी $5x^7+2x^3-4x+10$ ची कोटी (degree) किती आहे? (सोपे)

A) 2

B) 3

C) 5

D) 7

12. शून्य बहुपदीची (zero polynomial) कोटी किती असते? (मध्यम)

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

13. $\sqrt{10}$ या कोटीची स्थिर बहुपदी आहे. (मध्यम)

A) 0

B) 1

C) 2

D) 10

14. बहुपदी $p(x)=-9x+9$ चे शून्य कोणते आहे? (सोपे)

A) 0

B) -9

C) -1

D) 1

15. बहुपदी $p(x)=x^2-1$ ची शून्ये कोणती आहेत? (सोपे)

A) 0 आणि 1

B) -2 आणि 1

C) -1 आणि 1

D) 1 आणि 2

16. $x=-2$ असताना बहुपदी $7x^4+3x^2-4$ ची किंमत किती आहे? (सोपे)

A) 100

B) 110

C) 120

D) 130

17. जर $y^{97}+97$ ला $y+1$ ने भागले, तर बाकी किती राहते? (मध्यम)

A) 0

B) 1

C) 95

D) 96

18. ½ हे कोणत्या बहुपदीचे शून्य आहे? (मध्यम)

A) $(x-4)$

B) $(x+2)$

C) $(x+4)$

D) $(2x-1)$

19. बहुपदी x^2+4x+3 च्या शून्यांची संख्या किती आहे? (सोपे)

A) 1

B) 2

C) 3

D) -3

20. जर $3+5-8=0$ असेल, तर $(3)^3+(5)^3-(8)^3$ ची किंमत किती आहे? (मध्यम)

A) 260

B) –160

C) –360

D) 160

21. 104×96 ची किंमत किती आहे? (मध्यम)

A) 9984

B) 9469

C) 10234

D) 11324

22. (x+2) आणि (x+3) हे कोणत्या बहुपदीचे अवयव आहेत? (मध्यम)

A) x^2+3x+2

B) x^2+5x+6

C) x^2-5x+6

D) x^2-5x-6

23. x^2+7x+6 चे अवयव कोणते आहेत? (मध्यम)

A) (x+1) आणि (x+6)

B) (x+3) आणि (x+2)

C) (x−1) आणि (x−6)

D) (x−3) आणि (x−2)

24. जर x^2+x-20 च्या अवयवांपैकी एक (x+5) असेल, तर दुसरा अवयव कोणता आहे? (मध्यम)

A) (x−4)

B) (x+2)

C) (x+4)

D) (x−5)

25. बहुपदी $p(x)=ax^2+bx+c$ मध्ये, जर a=0 असेल, तर ती कोणती बहुपदी बनते? (मध्यम)

A) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

B) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

C) घन बहुपदी (Cubic polynomial)

D) बायक्वाड्रॅटिक बहुपदी (Biquadratic polynomial)

26. जर $f(x)=x^2-2$ असेल, तर f(0)+f(1) ची किंमत किती आहे? (सोपे)

A) 1

B) 2

C) 3

D) -3

27. जर $f(x)=x^2-2\sqrt{2}x+5$ असेल, तर $f(\sqrt{2})$ ची किंमत किती आहे? (मध्यम)

A) 3

B) 7

C) 13

D) 11

28. जर $x^2+kx+12=(x+4)(x+3)$ असेल, तर k ची किंमत किती आहे? (मध्यम)

A) 3

B) 4

C) 7

D) 12

29. $f(x)=x^2-10x+24$ च्या शून्यांमधील फरक किती आहे? (कठीण)

A) 2

B) -2

C) 5

D) 10

30. जर (x+2) हा $x^2+mx+14$ चा अवयव असेल, तर m ची किंमत किती आहे? (कठीण)

A) 2

B) 9

C) 7

D) -9

II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (एक गुणांचे प्रश्न)

31. द्विपदी (Binomial) ची व्याख्या करा. एक उदाहरण द्या. (सोपे)

32. रेषीय बहुपदी (Linear polynomial) ची व्याख्या करा. एक उदाहरण द्या. (सोपे)

33. वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial) ची व्याख्या करा. एक उदाहरण द्या. (सोपे)

34. शून्य बहुपदीची (zero polynomial) कोटी (degree) लिहा. (सोपे)

35. $(m+n)$ आणि $(m-n)$ यांचा गुणाकार शोधा. (सोपे)

36. $x^2+(a+b)x+ab$ चे अवयव लिहा. (मध्यम)

37. $2-x^2+x^3$ मध्ये x^2 चा सहगुणक (coefficient) लिहा. (सोपे)

38. $x=1$ असताना $p(x)=5x^2-3x+7$ ची किंमत शोधा. (सोपे)

39. शेष प्रमेय (Remainder theorem) चे विधान लिहा. (मध्यम)

40. शून्य बहुपदीला शून्य (zero) अस्तित्वात असते का? असल्यास, त्याचे शून्य लिहा. (मध्यम)

41. बहुपदी $p(x)=cx+d$ चे शून्य शोधा. (सोपे)

42. $x=4/5$ हे बहुपदी $p(x)=5x-\pi$ चे शून्य आहे का, हे पडताळा. (सोपे)

43. विस्तार करा: $(2a-3b)^2$ (सोपे)

44. जर $m+n+p=0$ असेल, तर $m^3+n^3+p^3$ ची किंमत शोधा. (सोपे)

III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (दोन गुणांचे प्रश्न)

45. ३७ कोटीची द्विपदी आणि १०० कोटीची एकपदी या प्रत्येकाचे एक उदाहरण द्या. (सोपे)

46. -2 आणि 2 हे बहुपदी $p(x)=(x^2-2x)$ चे शून्ये आहेत का, हे तपासा. (सोपे)

47. $(x+2)$ हा x^3+3x^2+5x+6 चा अवयव आहे का, हे तपासा. (मध्यम)

48. अवयव प्रमेयाचा (Factor Theorem) वापर करून y^2-5y+6 चे अवयव पाडा. (मध्यम)

49. जर $(x-1)$ हा $4x^3+3x^2-4x+k$ चा अवयव असेल, तर k ची किंमत शोधा. (मध्यम)

50. योग्य नित्यसमीकरणे (identity) वापरून $(x+4)$ आणि $(x+10)$ यांचा गुणाकार शोधा. (मध्यम)

51. $(x+y)^2$ आणि $(x-y)^2$ यांची बेरीज शोधा. (मध्यम)

52. अवयव पाडा: $49a^2+70ab+25b^2$ (मध्यम)

53. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून 104^3 चे मूल्यमापन करा. (मध्यम)

54. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून 105×106 चे मूल्यमापन करा.

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

55. $27y^3+125z^3$ चे अवयव पाडा. (मध्यम)

56. योग्य नित्य समीकरण (identity) वापरून $(3a+4b+5c)^2$ चा विस्तार करा. (मध्यम)

57. एका आयताकृती फळ्याची लांबी $(x+12)$ आणि रुंदी $(x-7)$ आहे. त्या आयताकृती फळ्याचे क्षेत्रफळ शोधा. (कठीण)

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

58. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग आणि घन बहुपदीमध्ये वर्गीकरण करा: (सोपे)

(i) x^2+x

(ii) $x-x^3$

(iii) y^2+y+4

(iv) $1+x$

(v) $3t$

(vi) r^2

(vii) $7x^3$

59. जर $x+y+z=0$ असेल, तर सिद्ध करा की $x^3+y^3+z^3=3xyz$ (मध्यम)

60. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$ चे अवयव पाडा. (मध्यम)

61. एका घनाकृती टाकीची लांबी $(x+10)$, रुंदी $(x+4)$ आणि उंची $(x-6)$ आहे. त्या घनाकृती टाकीचे घनफळ शोधा. (कठीण)

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

62. $x^3-23x^2+142x-120$ चे अवयव पाडा. (कठीण)

63. खालीलची पडताळणी करा: (कठीण)

(i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$

(ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

64. सिद्ध करा की $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ (कठीण)

65. खालीलचा विस्तार करा: (मध्यम)

a) $(a+b)^2$

b) $(a-b)^2$

c) $(a+b+c)^2$

d) $(a+b)^3$

e) $(a-b)^3$

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

66. खालीलचे अवयव लिहा: (मध्यम)

a) a^2-b^2

b) a^3+b^3

c) a^3-b^3

d) $a^3+b^3+c^3-3abc$

e) $a^4+a^2b^2+b^4$

"प्रकरण-२ बहुपदी" या धड्यातील प्रश्नांची उत्तरसूची

प्रकरण-२ बहुपदी (POLYNOMIALS)

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. A) $4x^2+2x-1$

2. D) 9

3. A) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

4. B) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

5. C) घन बहुपदी (Cubic Polynomial)

6. B) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

7. C) वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial)

8. A) x^2+2x+4

9. A) $2x+5$

10. B) ax^2+bx+c

11. D) 7

12. A) 0

13. A) 0

14. D) 1

15. C) -1 आणि 1

16. C) 120

17. D) 96

18. D) $(2x-1)$

19. B) 2

20. C) -360

21. A) 9984

22. B) x^2+5x+6

23. A) $(x+1)$ आणि $(x+6)$

24. A) $(x-4)$

25. B) रेषीय बहुपदी (Linear polynomial)

26. D) -3

27. A) 3

28. C) 7

29. A) 2

30. B) 9

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

31. द्विपदी (Binomial): दोन पदे असलेल्या बीजगणितीय पदावली ना द्विपदी म्हणतात.

उदाहरण: x^2-9x

32. रेषीय बहुपदी (Linear polynomial): ज्या बहुपदीची कोटी (degree) १ असते, तिला रेषीय बहुपदी म्हणतात.

उदाहरण: $2x-3$

33. वर्ग बहुपदी (Quadratic polynomial): ज्या बहुपदीची कोटी २ असते, तिला वर्ग बहुपदी म्हणतात.

उदाहरण: x^2-3x-6

34. शून्य बहुपदीची कोटी: शून्य बहुपदीची कोटी **शून्य (0)** असते.

35. $(m+n)$ आणि $(m-n)$ यांचा गुणाकार:

$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

36. $x^2+(a+b)x+ab$ चे अवयव:

(x+a) आणि (x+b)

37. $2-x^2+x^3$ मध्ये x^2 चा सहगुणक:

−1 आहे.

38. x=1 असताना $p(x)=5x^2-3x+7$ ची किंमत

$p(x)=5x^2-3x+7$

$p(1)=5(1)2-3(1)+7$

$p(1)=5(1)-3+7$

$p(1)=5-3+7$

$p(1)=2+7$

$p(1)=9$

39. शेष प्रमेय (Remainder Theorem) चे विधान लिहा.

जेव्हा एखादी बहुपदी f(x) ला रेषीय बहुपदी (x−a) ने भागले जाते, तेव्हा बाकी f(a) च्या बरोबर असते.

40. शून्य बहुपदीला शून्य (zero) अस्तित्वात असते का? असल्यास, त्याचे शून्य लिहा.

होय, शून्य बहुपदीचे शून्य कोणतीही वास्तव संख्या असते. शून्य बहुपदी म्हणजे अशी बहुपदी जिचे सर्व सहगुणक शून्य असतात.

41. बहुपदी p(x)=cx+d चे शून्य शोधा.

$p(x)=cx+d=0$

$cx=-d$

$x=-\frac{d}{c}$

42. $x=4/5$ हे बहुपदी $p(x)=5x-\pi$ चे शून्य आहे का, हे पडताळा.

$p(x)=5x-\pi$

$p(4/5)=5(4/5)-\pi$

$p(4/5)=4-\pi$

कारण $4-\pi$□$=0$,

त्यामुळे $x=4/5$ हे बहुपदीचे शून्य नाही.

43. विस्तार करा: $(2a-3b)^2$

हे $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ या स्वरूपात आहे.

$(2a-3b)^2=(2a)^2+(3b)^2-2(2a)(3b)$

$=4a^2+9b^2-12ab$

44. जर $m+n+p=0$ असेल, तर $m^3+n^3+p^3$ ची किंमत शोधा.

जर $m+n+p=0$ असेल, तर $m^3+n^3+p^3=3mnp$

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

45. ३५ कोटीची द्विपदी आणि १०० कोटीची एकपदी या प्रत्येकाचे एक उदाहरण द्या.

३५ कोटीची द्विपदी: $6x^{35}-50$

१०० कोटीची एकपदी: $25x^{100}$

46. −2 आणि 2 हे बहुपदी $p(x)=(x^2-2x)$ चे शून्ये आहेत का, हे तपासा.

- $x=-2$ साठी:

$p(-2)=(-2)^2-2(-2)$

$p(-2)=4+4$

$p(-2)=8$

त्यामुळे −2 हे शून्य नाही.

- $x=2$ साठी:

$p(2)=(2)^2-2(2)$

$p(2)=4-4$

$p(2)=0$

0=0, त्यामुळे 2 हे शून्य आहे.

निष्कर्ष: 2 हे बहुपदीचे शून्य आहे, परंतु −2 हे शून्य नाही.

47. $(x+2)$ हा x^3+3x^2+5x+6 चा अवयव आहे का, हे तपासा.

अवयव प्रमेयानुसार, जर $(x+2)$ हा अवयव असेल, तर $x=-2$ साठी बहुपदीची किंमत शून्य आली पाहिजे.

बहुपदी $p(x)=x^3+3x^2+5x+6$

$p(-2)=(-2)^3+3(-2)^2+5(-2)+6$

$p(-2)=-8+3(4)-10+6$

$p(-2)=-8+12-10+6$

$p(-2)=4-10+6$

$p(-2)=-6+6$

$p(-2)=0$

बाकी शून्य आल्यामुळे, होय, $(x+2)$ हा x^3+3x^2+5x+6 चा अवयव आहे.

---

48. अवयव प्रमेयाचा (Factor Theorem) वापर करून y^2-5y+6 चे अवयव पाडा.

$p(y)=y^2-5y+6$

6 चे अवयव 1,2,3 आहेत.

चाचणी घेऊन, आपल्याला $p(2)=0$ मिळते. म्हणून $(y-2)$ हा $p(y)$ चा एक अवयव आहे.

$p(2)=(2)^2-5(2)+6=4-10+6=0$

आता, आपण मध्यपद फोडून अवयव पाडू शकतो:

$p(y)=y^2-2y-3y+6$

$p(y)=y(y-2)-3(y-2)$

$p(y)=(y-2)(y-3)$

म्हणून, y^2-5y+6 चे अवयव $(y-2)$ आणि $(y-3)$ आहेत.

---

49. जर $(x-1)$ हा $4x^3+3x^2-4x+k$ चा अवयव असेल, तर k ची किंमत शोधा.

अवयव प्रमेयानुसार, जर $(x-1)$ हा अवयव असेल, तर $x=1$ साठी बहुपदीची किंमत शून्य असली पाहिजे.

$p(x)=4x^3+3x^2-4x+k$

$p(1)=4(1)^3+3(1)^2-4(1)+k=0$

$4(1)+3(1)-4+k=0$

$4+3-4+k=0$

$3+k=0$

$k=-3$

म्हणून, k ची किंमत −3 आहे.

---

50. योग्य नित्यसमीकरणे (identity) वापरून $(x+4)$ आणि $(x+10)$ यांचा गुणाकार शोधा.

आपण $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ही नित्य समीकरणे वापरू शकतो.

$(x+4)(x+10)=x^2+(4+10)x+(4)(10)$

$=x^2+14x+40$

म्हणून, गुणाकार $x^2+14x+40$ आहे.

---

51. $(x+y)^2$ आणि $(x-y)^2$ यांची बेरीज शोधा.

आपल्याला माहीत आहे की:

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

दोघांची बेरीज केल्यास:

$(x+y)^2+(x-y)^2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2+x^2+2xy-2xy+y^2+y^2$

$=2x^2+2y^2$

$=2(x^2+y^2)$

---

52. अवयव पाडा: $49a^2+70ab+25b^2$

हे पद $(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2$ या नित्यसमीकरणाच्या स्वरूपात आहे.

$49a^2=(7a)^2$

$25b^2=(5b)^2$

$70ab=2\times(7a)\times(5b)$

म्हणून, $49a^2+70ab+25b^2=(7a)^2+2(7a)(5b)+(5b)^2$

$=(7a+5b)^2$

53. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून 104^3 चे मूल्यमापन करा.

$104^3=(100+4)^3$

हे $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ या नित्यसमीकरणाच्या स्वरूपात आहे.

येथे $x=100$ आणि $y=4$

$(100+4)^3=(100)^3+(4)^3+3(100)(4)(100+4)$

$=1000000+64+1200(104)$

$=1000000+64+124800$

$=1124864$

54. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून 105×106 चे मूल्यमापन करा.

हे $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ या स्वरूपात आहे.

$105\times106=(100+5)(100+6)$

$=(100)^2+(5+6)(100)+(5)(6)$

$=10000+(11)(100)+30$

$=10000+1100+30$

$=11130$

---

55. $27y^3+125z^3$ चे अवयव पाडा.

$27y^3+125z^3=(3y)^3+(5z)^3$

हे $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ या स्वरूपात आहे.

येथे $a=3y$ आणि $b=5z$

$(3y)^3+(5z)^3=(3y+5z)[(3y)^2+(5z)^2-(3y)(5z)]$

$=(3y+5z)[9y^2+25z^2-15yz]$

म्हणून, अवयव $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ आहेत.

56. योग्य नित्यसमीकरणे वापरून $(3a+4b+5c)^2$ चा विस्तार करा.

हे $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ या स्वरूपात आहे.

$(3a+4b+5c)^2$

$=(3a)^2+(4b)^2+(5c)^2+2(3a)(4b)+2(4b)(5c)+2(5c)(3a)$

$=9a^2+16b^2+25c^2+24ab+40bc+30ca$

म्हणून, विस्तार $9a^2+16b^2+25c^2+24ab+40bc+30ca$ आहे.

57. एका आयताकृती फळ्याची लांबी (x+12) आणि रुंदी (x−7) आहे. त्या आयताकृती फळ्याचे क्षेत्रफळ शोधा.

लांबी (l) =(x+12)

रुंदी (b) =(x−7)

आयताकृती फळ्याचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

$A=l\times b$

$A=(x+12)(x-7)$

हे $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ या स्वरूपात आहे.

$A=x^2+(12-7)x+(12)(-7)$

$A=x^2+5x-84$

म्हणून, आयताकृती फळ्याचे क्षेत्रफळ $(x^2+5x-84)$ चौरस एकक आहे.

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

58. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग आणि घन बहुपदीमध्ये वर्गीकरण करा:

- **रेषीय बहुपदी (Linear Polynomials):** $1+x$, $3t$
- **वर्ग बहुपदी (Quadratic Polynomials):** x^2+x, y^2+y+4, r^2
- **घन बहुपदी (Cubic Polynomials):** $x-x^3$, $7x^3$

59. जर $x+y+z=0$ असेल, तर सिद्ध करा की $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

दिलेले आहे: $x+y+z=0$

$\Rightarrow x+y=-z$

दोन्ही बाजूंना घन (cube) केल्यास:

$(x+y)^3=(-z)^3$

$x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3$

आपल्याला माहीत आहे की $x+y=-z$, म्हणून हे समीकरणात ठेवल्यास:

$x^3+y^3+3xy(-z)=-z^3$

$x^3+y^3-3xyz=-z^3$

$x^3+y^3+z^3=3xyz$

हे सिद्ध होत.

60. योग्य नित्यसमीकरणे (identity) वापरून $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$ चे अवयव पाडा.

$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$

याला असेही लिहू शकतो: $(2x)^3+(3y)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2$

$=(2x)^3+(3y)^3+3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)$

$=(2x)^3+(3y)^3+36x^2y+54xy^2$

हे $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ या नित्यसमीकरणे स्वरूपात आहे.

येथे $a=2x$ आणि $b=3y$

म्हणून, $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2=(2x+3y)^3$

---

61. एका घनाकृती टाकीची लांबी $(x+10)$, रुंदी $(x+4)$ आणि उंची $(x-6)$ आहे. त्या घनाकृती टाकीचे घनफळ शोधा.

लांबी $(l)=(x+10)$

रुंदी $(b)=(x+4)$

उंची $(h)=(x-6)$

घनाकृती टाकीचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची

$V=l\times b\times h$

$V=(x+10)(x+4)(x-6)$

आपल्याला माहीत आहे की $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

येथे $a=10, b=4, c=-6$

$V=x^3+(10+4-6)x^2+[(10\times4)+(4\times-6)+(-6\times10)]x+(10\times4\times-6)$

$V=x^3+(14-6)x^2+[40-24-60]x-240$

$V=x^3+8x^2+[16-60]x-240$

$V=x^3+8x^2-44x-240$

म्हणून, घनाकृती टाकीचे घनफळ $(x^3+8x^2-44x-240)$ घन एकक आहे.

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

62. $x^3-23x^2+142x-120$ चे अवयव पाडा.

$p(x)=x^3-23x^2+142x-120$

-120 चे अवयव $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm8,\pm10,\pm12,\pm15,\pm20,\pm24,\pm30,\pm60$ आहेत.

चाचणी घेऊन, आपल्याला $p(1)=0$ मिळते. म्हणून $(x-1)$ हा $p(x)$ चा एक अवयव आहे.

$p(1)=(1)^3-23(1)^2+142(1)-120=1-23+142-120=143-143=0$

आता, $x^3-23x^2+142x-120$ ला $(x-1)$ ने भागल्यास (किंवा पद फोडून):

$x^3-x^2-22x^2+22x+120x-120$

$=x^2(x-1)-22x(x-1)+120(x-1)$

$=(x-1)(x^2-22x+120)$

आता $x^2-22x+120$ चे अवयव पाडूया (मध्यपद फोडून):

आपल्याला अशा दोन संख्या हव्यात ज्यांचा गुणाकार 120 आणि बेरीज -22 असेल. त्या संख्या -10 आणि -12 आहेत.

$x^2-22x+120=x^2-12x-10x+120$

$=x(x-12)-10(x-12)$

$=(x-12)(x-10)$

म्हणून, $x^3-23x^2+142x-120$ चे अवयव $(x-1)(x-12)(x-10)$ आहेत.

63. खालीलची पडताळणी करा:

(i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$

आपल्याला माहीत आहे की: $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

म्हणून, $x^3+y3=(x+y)3-3xy(x+y)$

$(x+y)$ हे सामायिक अवयव घेतल्यास:

$x^3+y^3=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$

$x^3+y^3=(x+y)[(x^2+2xy+y^2)-3xy]$

$x^3+y^3=(x+y)[x^2+y^2-xy]$

हे सिद्ध होते.

(ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$

आपल्याला माहीत आहे की: $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$

म्हणून, $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$(x-y)$ हे सामायिक अवयव घेतल्यास:

$x^3-y^3=(x-y)[(x-y)^2+3xy]$

$x^3-y^3=(x-y)[(x^2-2xy+y^2)+3xy]$

$x^3-y^3=(x-y)[x^2+y^2+xy]$

हे सिद्ध होते.

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

64. सिद्ध करा की $x^3+y^3+z^3-3xyz=21(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

डावी बाजू (LHS): $x^3+y^3+z^3-3xyz$

आपल्याला माहीत आहे की:

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

उजवी बाजू (RHS): $21(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

$=21(x+y+z)[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$

$=21(x+y+z)[x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2yz-2zx]$

$=21(x+y+z)[2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx]$

$=21(x+y+z)\times 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

LHS = RHS

हे सिद्ध होते.

---

65. खालीलचा विस्तार करा:

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

d) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

e) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

66. खालीलचे अवयव लिहा:

a) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

b) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

c) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

d) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

e) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

प्रकरण – ३
सहनिर्देशक भूमिती (CO-ORDINATE GEOMETRY)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

सहनिर्देशक प्रतलातील (co-ordinate plane) X-अक्ष, Y-अक्ष, आरंभबिंदू (origin) आणि चरण (quadrants) ओळखणे.

सहनिर्देशक प्रतलावर बिंदूंचे स्थान निश्चित करणे (plot)

अध्ययन अंश (Learning Points):

- कार्टेशियन पद्धत (Cartesian system).
- बिंदूचे सहनिर्देशक (Co-ordinates of a point).
- आलेखावर (graph) बिंदू चे स्थान निश्चित करणे.

सोपे (EASY)	मध्यम (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
15	15	04	34

I. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी/अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडून त्याचे अक्षर आणि पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. आरंभबिंदूचे (origin) सहनिर्देशक काय आहेत? (सोपे)

A) (0, 1) B) (1, 0) C) (0, 0) D) (1, 1)

2. (4, 3) या बिंदूचे y-अक्षापासूनचे अंतर किती आहे? (सोपे)

A) 4 एकक (units) B) 3 एकक (units) C) 0 एकक (units) D) -7 एकक (units)

3. एखाद्या बिंदूचा भुज (abscissa) कोणत्या चरणात धन (positive) असतो? (सोपे)

A) I आणि II चरण B) I आणि IV चरण C) फक्त I चरण D) फक्त II चरण

4. जर एखाद्या बिंदूचा y निर्देशक शून्य असेल, तर तो बिंदू नेहमी कोठे असतो? (मध्यम)

A) पहिल्या चरणात B) दुसऱ्या चरणात C) x-अक्षावर D) y-अक्षावर

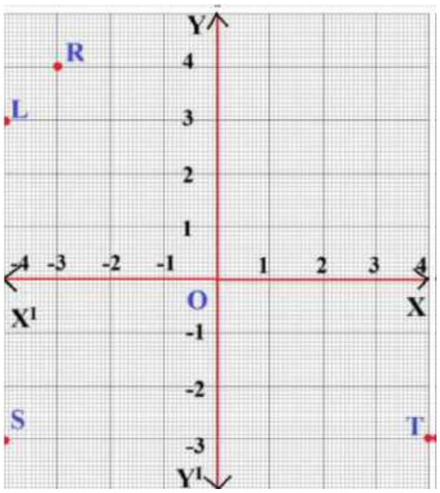
5. ज्याचे दोन्ही सहनिर्देशक ऋण (negative) आहेत, असा बिंदू कोणत्या चरणात असेल? (सोपे)

A) पहिल्या चरणात B) दुसऱ्या चरणात C) तिसऱ्या चरणात D) चौथ्या चरणात

6. दोन सहनिर्देशक अक्ष (coordinate axes) ज्या बिंदूत मिळतात, त्याला काय म्हणतात? (सोपे)

A) भुज (Abscissa) B) कोटी (Ordinate) C) आरंभबिंदू (Origin) D) चरण (quadrant)

7. दिलेल्या आलेखात (-4, -3) सहनिर्देशक असलेला बिंदू कोणता आहे? (सोपे)



A) T B) R C) L D) S

8. (-3, 2) हा बिंदू कोणत्या चरणात येतो? (सोपे)

A) I B) III C) IV D) II

9. बिंदू (0, 2) कोणत्या अक्षावर येतो? (सोपे)

A) x-अक्ष (x-axis) B) आरंभबिंदू (Origin) C) y-अक्ष (y-axis) D) I चरण (I quadrant)

10. तिसऱ्या चरणात (third quadrant) असलेल्या बिंदू (x, y) च्या भुज (abscissa) आणि कोटी (ordinate) ची चिन्हे (sign) कोणती असतात? (सोपे)

A) (-x, -y) B) (+x, +y) C) (-x, +y) D) (+x, -y)

11. आलेखावर (0, 2), (2, 2), (2, 0) आणि (0, 0) हे बिंदू जोडल्यास आपल्याला काय मिळते? (मध्यम)

A) आयत (Rectangle) B) चौरस (Square)
C) समभुज चौकोन (Rhombus) D) समांतरभुज चौकोन (Parallelogram)

12. X-अक्षावरील (x-axis) येणारे सर्व Y निर्देशांक (Ordinate) (मध्यम)

A) 1 B) -1 C) 2 D) 0

13. ज्या बिंदूचा भुज (abscissa) 4 आहे आणि जो x-अक्षावर (x-axis) येतो, तो बिंदू कोणता आहे?

(मध्यम)

A) (0, 4) B) (4, 0) C) (4, 1) D) (1, 4)

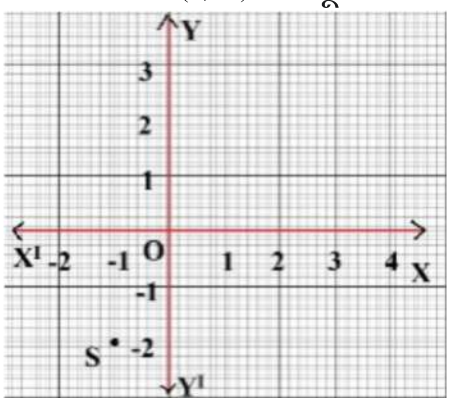
14. एखाद्या बिंदूची कोटी (Ordinate) कोणत्या चरणात धन (positive) असते? (सोपे)

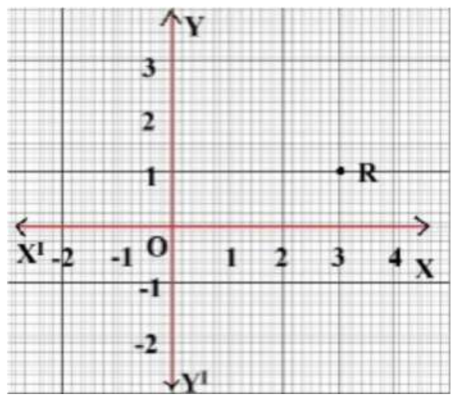
A) पहिले चरण फक्त B) दुसरे चरण फक्त C) पहिले आणि दुसरे चरण D) दुसरे आणि चौथे चरण

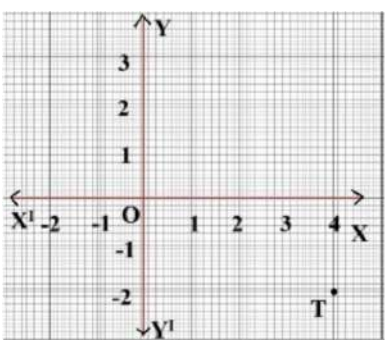
15. बिंदू (5, -2) चे x-अक्षापासूनचे (x-axis) लंब अंतर किती आहे?
(मध्यम)

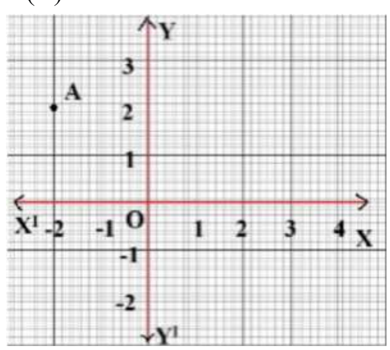
A) 5 एकक (units) B) 0 एकक (units) C) 3 एकक (units) D) 2 एकक (units)

16. खालीलपैकी (4, -2) हा बिंदू कोणता आहे? (मध्यम)

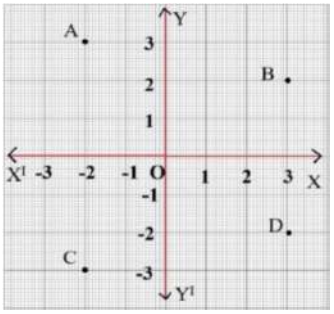
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

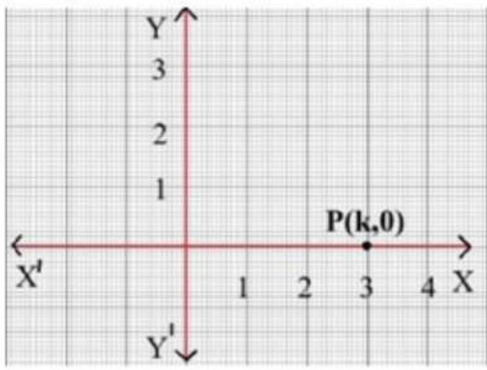
17. A, B, C आणि D चे सहनिर्देशक अनुक्रमे काय आहेत?
(मध्यम)



(A) (3,2), (-2,3), (-2, -3), (3, -2) (B) (3, -2), (-3,2), (-2, -3), (3, -2)

(C) (-2,3), (3,2), (-2,3), (-3,2) (D) (-2,3), (3,2), (-2,-3), (3,-2)

18. आलेखात, जर k=x+1 असेल, तर x ची किंमत किती आहे? (मध्यम)



(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (एक गुणांचे प्रश्न)

19. आरंभबिंदूच्या डावीकडे 4 एकक अंतरावर x-अक्षावर असलेल्या बिंदूचे सहनिर्देशक लिहा. (सोपे)

20. (-4, -1) हा बिंदू कोणत्या चरणात येतो ते लिहा. (सोपे)

21. जो बिंदू x-अक्ष आणि y-अक्ष दोन्हीवर येतो, त्याचे सहनिर्देशक काय आहेत? (सोपे)

22. बिंदू (6, -3) चा भुज (abscissa) आणि कोटी (ordinate) सांगा. (सोपे)

23. जर x < 0 आणि y > 0 असेल, तर बिंदू (x,y) कोणत्या चरणात येतो ते लिहा. (मध्यम)

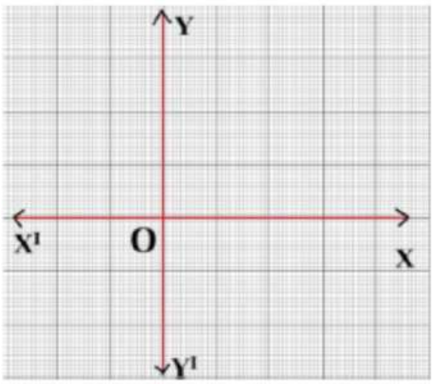
24. बिंदू P हा x-अक्षाच्या 5 एकक वर आणि y-अक्षाच्या डावीकडे 3 एकक आहे, तर बिंदू P चे सह निर्देशक लिहा. (मध्यम)

25. जर एखाद्या बिंदूचा x-निर्देशक 0 असेल, तर तो बिंदू कोठे असतो?
(सोपे)

26. जो बिंदू x-अक्षाच्या 7 एकक वर आणि y-अक्षापासून 0 एकक अंतरावर आहे, त्या बिंदूचे सहनिर्देशक लिहा.
(मध्यम)

III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (दोन गुणांचे प्रश्न)

27. आलेखाच्या संदर्भात खालील गोष्टींना नावे द्या.
(मध्यम)

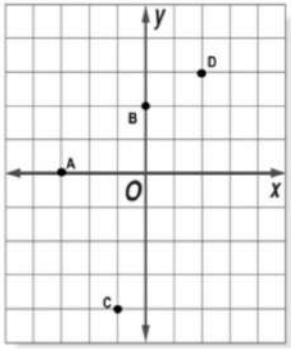


a) आडवी रेषा (Horizontal line)
b) उभी रेषा (Vertical line)
c) दोन अक्षांच्या छेदनबिंदू (The point of intersection of two axes)
d) प्रतलाचा प्रत्येक भाग जो दोन अक्षांमुळे विभागला जातो (Each part of the plane divided by two axes)

28. खालीलपैकी प्रत्येक बिंदू कोणत्या चरणात (quadrant) किंवा अक्षावर (axis) आहे ते लिहा.
(मध्यम)
(-3, 5), (2, -2), (-3, 0), (-4, -6)

29. खालील बिंदूंचे सहनिर्देशक लिहा. (कठीण)
a) x-अक्षावर (x-axis) असलेला, ज्याचा x-निर्देशक 5 आहे.
b) y-अक्षावर (y-axis) असलेला, ज्याचा y-निर्देशक -2 आहे.

30. दिलेल्या आलेखावरून, बिंदू A, B, C आणि D चे सहनिर्देशक लिहा. (मध्यम)



IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (तीन गुणांचे प्रश्न)

३१. आलेखावर (graph) खालील बिंदू चे स्थान निश्चित करा (plot):
(मध्यम)

बिंदू	P	Q	R	S
X	0	2	-2	3
y	2	4	0	5

३२. (2, 3) आणि (3, 2) या बिंदूंमधून जाणारी रेषा काढा. ही रेषा x-अक्ष आणि y-अक्ष यांना ज्या बिंदूंमध्ये छेदते, त्या बिंदूंचे सहनिर्देशक शोधा.
(कठीण)

V. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (चार गुणांचे प्रश्न)

३३. एका चौरस KLMN च्या तीन शिरोबिंदूंचे (vertices) सह निर्देशक K (-4, 2), L (3, 2), M (3, -5) आहेत. K, L, M हे बिंदू आलेखावर स्थापित करा. चौरस पूर्ण करा आणि N चे सहनिर्देशक लिहा.

(कठीण)

३४. खालील संदर्भ आलेखाच्या स्वरूपात दर्शवा आणि बनणाऱ्या आकृतीचे क्षेत्रफळ शोधा. (कठीण)
नववीतील एक विद्यार्थी आपल्या घरी (4, 3) या बिंदूवर राहतो. तो नंतर त्याच्या मित्राच्या घरी गेला, जे आरंभबिंदूपासून 4 एकक उजवीकडे आणि X-अक्षावर आहे. त्यानंतर ते दोघे शाळेत पोहोचले, जी आरंभबिंदूवर स्थित आहे.
(कठीण)

प्रकरण-३ सहनिर्देशक भूमिती (COORDINATE GEOMETRY)

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. C) (0, 0)
2. A) 4 एकक (units)
3. B) I आणि II चरण (quadrants)
4. C) x–अक्ष (x-axis)
5. C) III चरण (quadrant)
6. C) आरंभ बिंदू (Origin)
7. D) S
8. D) II
9. C) y-अक्ष (y-axis)
10. A) (–x, –y)
11. B) चौरस (Square)
12. D) 0
13. B) (4, 0)
14. C) I आणि II चरण (quadrants)
15. D) 2
16. C) T
17. D) (–2, 3), (3, 2), (–2, –3), (3, –2)
18. B) 2

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

19. (-4, 0)
20. तिसरे चरण(quadrant)
21. (0, 0)
22. भुज (abscissa) 6 आणि कोटी (ordinate) –3
23. II चरण (quadrant)
24. (–3, 5)
25. y – अक्ष (y-axis)
26. (0, 7)

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

27. आलेखाच्या संदर्भात खालील गोष्टी:

a) आडवी रेषा (Horizontal line): x–अक्ष (x-axis)

b) उभी रेषा (Vertical line): y–अक्ष (y-axis)

c) दोन अक्षांच्या छेदनबिंदू (The point of intersection of two axes): आरंभबिंदू (Origin)

d) प्रतलाचा प्रत्येक भाग जो दोन अक्षांमुळे विभागला जातो (Each part of the plane divided by two axes): चरण (Quadrant)

२८. खालीलपैकी प्रत्येक बिंदूंचे चरण (quadrant) किंवा अक्ष (axis)

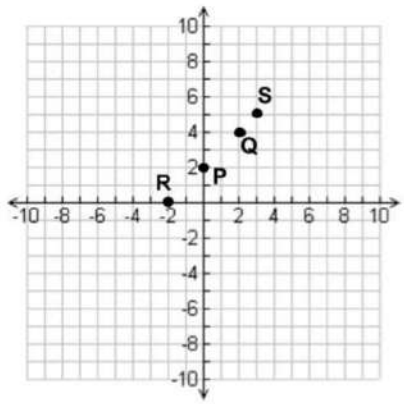
- बिंदू (–3, 5) हा II चरणात (quadrant) आहे.
- बिंदू (2, –2) हा IV चरणात (quadrant) आहे.
- बिंदू (–3, 0) हा x-अक्षावर (x-axis) आहे.

- बिंदू (–4, –6) हा III चरणात (quadrant) आहे.

२९. खालील बिंदूंचे सहनिर्देशक
a) x-अक्षावर (x-axis) असलेला, ज्याचा x-निर्देशक 5 आहे: (5, 0)
b) y-अक्षावर (y-axis) असलेला, ज्याचा y-निर्देशक –2 आहे: (0, –2)

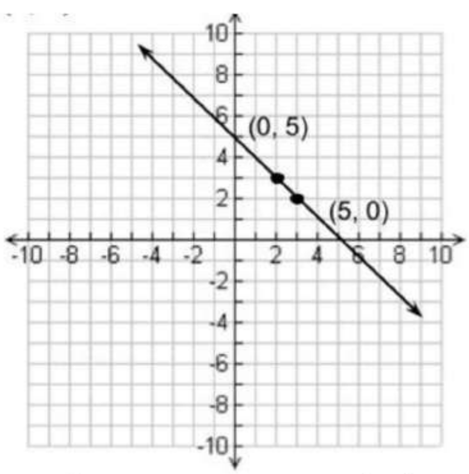
३०. दिलेल्या आलेखावरून, बिंदू A, B, C आणि D चे सहनिर्देशक
A (–3, 0) B (0, 2) C (–1, 4) D (2, 3)

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)



३१. आलेखावर (graph) खालील बिंदूंचे स्थान
- P (0, 2): हा बिंदू y-अक्षावर 2 एककावर आहे.
- Q (2, 4): हा बिंदू x-अक्षावर 2 आणि y-अक्षावर 4 एककावर आहे.
- R (–2, 0): हा बिंदू x-अक्षावर -2 एककावर आहे.
- S (3, 5): हा बिंदू x-अक्षावर 3 आणि y-अक्षावर 5 एककावर आहे.

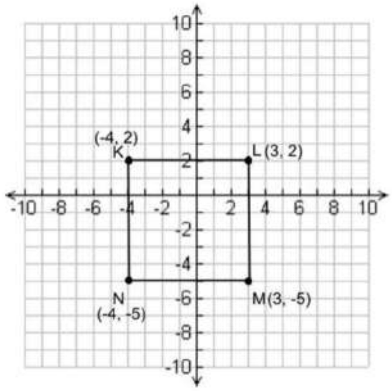
३२.



- ही रेषा x-अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते, त्याचे सहनिर्देशक (5, 0) आहेत.
- ही रेषा y-अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते, त्याचे सहनिर्देशक (0, 5) आहेत.

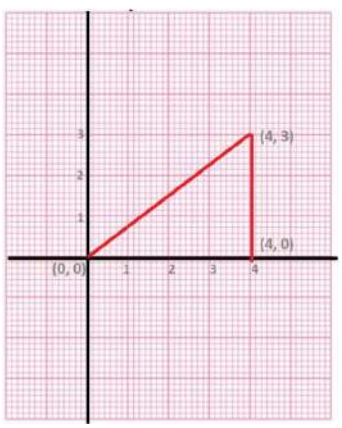
V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

३३.



N चे सहनिर्देशक (-4, -5) आहेत.

३४.



परिस्थिती: नववीतील एक विद्यार्थी आपल्या घरी (4,3) या बिंदूवर राहतो. तो नंतर त्याच्या मित्राच्या घरी गेला, जे आरंभबिंदूपासून 4 एकक उजवीकडे आणि X-अक्षावर आहे. त्यानंतर ते दोघे शाळेत पोहोचले, जी आरंभबिंदूवर स्थित आहे.

आलेखी स्वरूप:

- विद्यार्थ्याचे घर: बिंदू H (4, 3)
- मित्राचे घर: आरंभबिंदूपासून 4 एकक उजवीकडे X-अक्षावर, म्हणजे बिंदू F (4, 0)
- शाळा: आरंभबिंदूवर, म्हणजे बिंदू S (0, 0)

या तीन बिंदूंना (4,3), (4,0) आणि (0,0) जोडल्यास एक त्रिकोण (triangle) तयार होतो.

बंद त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ:

क्षेत्रफळाचे सूत्र: 1/2×पाया×उंची

- या त्रिकोणाचा पाया x-अक्षावर आहे (बिंदू F (4,0) आणि S (0,0) यांच्या दरम्यान).
- पाया (base) = S पासून F पर्यंतचे अंतर = 4 - 0 = 4 एकक.
- उंची (height) = बिंदू H (4,3) पासून x-अक्षावरील लंब अंतर = H चा y-निर्देशक = 3 एकक.

क्षेत्रफळ =1/2×4×3

क्षेत्रफळ =1/2×12

क्षेत्रफळ =6 चौरस एकक.

म्हणून, आलेखातील बंद त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 6 चौरस एकक आहे.

प्रकरण–4 दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- दोन चलांमधील रेषीय समीकरणे $ax+by+c=0$ या प्रमाणित स्वरूपात ओळतील आणि व्यक्त करतील.
- दिलेल्या दैनंदिन जीवनातील परिस्थितीतून दोन चलांमधील रेषीय समीकरणे तयार करतील.
- दोन चलांमधील रेषीय समीकरणांसाठी उकल शोधतील.

अध्ययन अंश (Learning Points):

- दोन चलांमधील रेषीय समीकरणाचे प्रमाणित स्वरूप.
- दोन चलांमधील रेषीय समीकरणाची उकल.

सोपे (EASY)	साधारण (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
13	13	02	28

I. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी / अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (A, B, C, D) सह संपूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. x आणि y या दोन चलांमधील रेषीय समीकरणाचे प्रमाणित स्वरूप आहे: (सोपे)
   A) $ax+by=0$
   B) $ax+by+c=0$
   C) $ax-by-c=0$
   D) $ax+by=0$
2. $2x-5y=7$ या रेषीय समीकरणाला आहेत: (सोपे)
   A) एक अद्वितीय उकल
   B) दोन उकले
   C) अनंत उकले
   D) कोणतीही उकल नाही
3. $ax+by+c=0$ या समीकरणाची धन उकल नेहमी _________ मध्ये असतात. (साधारण)
   A) 1 ल्या चरणात
   B) 2 ऱ्या चरणात
   C) 3 ऱ्या चरणात
   D) 4 थ्या चरणात
4. $x-2y=4$ या समीकरणाची उकल आहे: (साधारण)
   A) (0, 2)
   B) (2, 0)
   C) (1, 1)

D) (4, 0)

5. जर (3,0) हे 2x+3y=k या रेषीय समीकरणाची उकल असेल, तर k ची किंमत आहे: (सोपे)
6. A) 6 B) 4 C) 5 D) 2
7. y=x या रेषेवरील कोणताही बिंदू कोणत्या स्वरूपात असतो? (सोपे)
8. A) (a,0) B) (0,a) C) (a,a) D) (a,−a)
9. x=5 आणि y=2 ही उकल असलेले रेषीय समीकरण आहे: (सोपे)
10. A) 5x+2y=7 B) x+2y=7 C) x+y=7 D) 5x+y=7
11. खालीलपैकी कोणते दोन चलांमधील रेषीय समीकरण नाही? (सोपे)
12. A) ax+by=c B) $ax^2+by=c$ C) 2x−5=3y D) 2y−6=3x
13. दोन चलांमधील रेषीय समीकरणासाठी उत्तरांची संख्या किती असते? (सोपे)
14. A) 1 B) 4 C) 2 D) अनंत
15. 3x+0y+7=0 या रेषीय समीकरणाची उकल कोणत्या स्वरूपात असते? (सोपे)
16. A) (−7/3 ,3) B) (4,−7/3) C) (7/3 ,0) D) (0,−7/3)
17. क्रिकेट सामन्यात दोन फलंदाजांनी मिळून 181 धावा केल्या. या विधानाचे रेषीय समीकरणाचे स्वरूप आहे:
18. A) x−y=181 B) xy=181 C) x+y=181 D) x/y=181 (साधारण)

II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (एक गुणांचे प्रश्न)

19. "एका संख्येची दुप्पट दुसऱ्या संख्येत मिळवल्यास, उत्तर 8 येते". हे विधान दोन चलांमधील रेषीय समीकरणात व्यक्त करा. (साधारण(
20. x+1/y=8 हे दोन चलांमधील रेषीय समीकरण आहे का? (साधारण(
21. जर x=0 असेल, तर 3x+4y=12 या समीकरणात y ची किंमत शोधा. (साधारण(
22. x+y=5 या समीकरणासाठी एक उकल शोधा. (साधारण(
23. y=3x−7 हे दोन चलांमधील रेषीय समीकरणाच्या प्रमाणित स्वरूपात लिहा. (सोपे)
24. (2,−1) हा बिंदू 3x−y=7 या रेषेवर आहे का ते शोधा. (साधारण(
25. x-अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण लिहा. (साधारण(
26. रेषीय समीकरणाचा आलेख आरंभबिंदूतून जातो, तर त्याचे समीकरण लिहा. (साधारण()
27. 5x=2y+2 हे समीकरण ax+by+c=0 च्या स्वरूपात दर्शवा. (सोपे)

III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (दोन गुणांचे प्रश्न)

28. 2x−8=6y हे प्रमाणित स्वरूपात व्यक्त करा आणि a,b आणि c च्या किंमती लिहा. (सोपे)
29. 5x+2y=2 हे ax+by+c=0 च्या स्वरूपात व्यक्त करा आणि a+b+c ची किंमत शोधा. (साधारण(
30. जर (3,4) हा बिंदू 3y=px+7 या समीकरणाच्या आलेखावर असेल, तर p ची किंमत शोधा. (साधारण(

31. k ची किंमत शोधा, जर $x=3$ आणि $y=2$ हे $3x+4y=k$ या समीकरणाची उकल असेल. (सोपे)

32. $4x+3y=12$ या समीकरणाचा आलेख x-अक्ष आणि y-अक्षाला जेथे छेदतो ते बिंदू शोधा.
(साधारण(

IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (तीन गुणांचे प्रश्न)

33. खालीलपैकी कोणती $x+2y=6$ या समीकरणाची उकल आहे ते पडताळून पहा.
(साधारण(

34. a) (1,2) b) (2,2) c) (0,3)

35. एका वाहनाचे भाडे पहिल्या किलोमीटरसाठी ₹25 आहे आणि त्यानंतरच्या प्रत्येक किलोमीटरसाठी ₹15 आहे. जर 9 किमी अंतर कापले असेल, तर भरावी लागणारी एकूण रक्कम किती असेल? (कठीण)

36. खालील प्रश्नाचे उत्तर द्या. (चार गुणांचे प्रश्न)

37. $3x+y-12=0$ या रेषीय समीकरणासाठी कोणत्याही चार उकली (solutions) लिहा. (कठीण)

प्रकरण – 4 दोन चलपदांची रेषीय समीकरणे

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. B) $ax+by+c=0$
2. C) अनंत उकली (Infinitely many solutions)
3. A) Iले चरणा (Iquadrant)
4. D) (4, 0)
5. A) 6
6. C) (a,a)
7. C) $x+y=7$
8. B) $ax^2+by=c$
9. D) अनंत (Infinite)
10. A) (−7/3 ,3)
11. C) $x+y=181$

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

12. $2x+y=8$
13. नाही (No)
14. $y=3$
15. जर $x=0$ तर $y=5$. उकल (0,5) आहे.
16. $3x–y–7=0$
17. $3(2)–(–1)=6+1=7$. होय, हा बिंदू दिलेल्या रेषेवर आहे.
18. $y=a$
19. $y=mx$
20. $5x–2y–2=0$

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

21. प्रमाणित स्वरूप $2x–6y–8=0$ आहे; येथे $a=2$, $b=–6$ आणिा $c=–8$.
22. $5x+2y–2=0$

    $a+b+c=5+2–2=5$

23. बिंदू (3,4) हा $3y=px+7$ या रेषेवर आहे, म्हणून $x=3$ आणि $y=4$ प्रतिस्थापित केल्यास:

    $3(4)=p(3)+7$

12=3p+7

3p=12−7

3p=5

p=5/3

24. 3x+4y=k या समीकरणात x=3 आणि y=2 घेतल्यास.

3(3)+4(2)=k

9+8=k

k=17

4x+3y=12

जेव्हा बिंदू x-अक्षाला छेदतो तेव्हा y=0 असतो.

4x+3(0)=12

4x=12

x=3. म्हणून, बिंदू (3,0) आहे.

जेव्हा बिंदू y-अक्षाला छेदतो तेव्हा x=0 असतो.

25. 4(0)+3y=12

3y=12

y=4. म्हणून, बिंदू (0,4) आहे.

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

26. x+2y=6

a) (1,2) येथे x=1 आणि y=2

1+2(2)=1+4=5. हे उत्तर नाही.

b) (2,2) येथे x=2 आणि y=2

2+2(2)=2+4=6. हे उत्तर आहे.

c) (0,3) येथे $x=0$ आणि $y=3$

$0+2(3)=0+6=6$. हे उत्तर आहे.

27. कापलेले एकूण अंतर 9 किमी आहे.

द्यायची एकूण रक्कम y आहे.

पहिल्या किमीसाठी ₹25 आहे आणि $x=8$ (पुढील किमीसाठी).

म्हणून, समीकरण आहे: $y=25+15x$

$y=25+15(8)$

$y=25+120$

$y=145$

द्यायची एकूण रक्कम ₹145 आहे.

चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

28. $3x+y-12=0$

याला $y=12-3x$ असे लिहिता येते.

a) जर $x=0$, तर $y=12-3(0)=12$. म्हणून उपाय (0,12) आहे.
b) जर $x=1$, तर $y=12-3(1)=9$. म्हणून उपाय (1,9) आहे.
c) जर $x=2$, तर $y=12-3(2)=6$. म्हणून उपाय (2,6) आहे.
d) जर $x=-2$, तर $y=12-3(-2)=12+6=18$. म्हणून उपाय (−2,18) आहे.

प्रकरण – 5 युक्लीडच्या भूमितीचा परिचय

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- बिंदू, रेषा, किरण, रेषाखंड आणि पृष्ठभाग यांसारख्या भूमितीय संकल्पना समजून घेणे.
- व्याख्या, मूलतत्त्वे आणि गृहितत्वे यामधील फरक समजून घेणे.
- रेषा, कोन आणि सपाट आकृत्यांशी संबंधित सर्व मूलभूत समस्या सोडवण्यासाठी या संकल्पना लागू करणे.

अध्ययन अंश (Teaching Points):

- यूक्लिडच्या व्याख्या.
- मूलतत्त्वे (axioms) आणि गृहितत्वे (postulates).
- यूक्लिडच्या पाचव्या गृहिततत्वाचे समान रूपांतर

सोपे (EASY)	सरासरी (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
25	08	03	36

I. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी / अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (A, B, C, D) सह संपूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. ज्या गणिताच्या विधानाला पुराव्याची आवश्यकता असते ते आहे: (सोपे)

(A) प्रमेय (Theorem)

(B) मूलतत्त्व (Axiom)

(C) व्याख्या (Definition)

(D) गृहित तत्व(Postulate)

2. यूक्लिड कोणत्या देशाशी संबंधित होता? (सोपे)

(A) बॅबिलोनिया (Babylonia)

(B) इजिप्त (Egypt)

(C) ग्रीस (Greece)

(D) फ्रान्स (France)

3. जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात ते: (सोपे)

(A) तपरस्पराशी समान असतात

(B) असमान

(C) एकाच वस्तूच्या अर्ध्या

(D) एक दुसऱ्याच्या दुप्पट

4. मूलतत्त्व (Axioms) हे गृहित धरलेल जातात: (सोपे)

(A) कोणत्याही पुराव्याची गरज नसलेली वैश्विक सत्ये.

(B) भूमितीसाठी विशिष्ट असलेली वैश्विक सत्ये.

(C) प्रमेय.

(D) व्याख्या.

5. घन वस्तूंपासून बिंदूपर्यंतचे तीन टप्पे आहेत: (सरासरी)

(A) घन-पृष्ठभाग-रेषा-बिंदू (solids-surfaces-lines-points)

(B) घन-रेषा-पृष्ठभाग-बिंदू (solids-lines-surfaces-points)

(C) रेषा-बिंदू-पृष्ठभाग-घन (lines-points-surfaces-solids)

(D) रेषा-पृष्ठभाग-बिंदू-घन (lines-surfaces-points-solids)

6. घनाच्या सीमा आहेत: (सोपे)

(A) पृष्ठभाग (Surfaces)

(B) वक्र (curves)

(C) रेषा (lines)

(D) बिंदू (points)

7. यूक्लिडने आपला प्रसिद्ध ग्रंथ "द एलिमेंट्स" यात विभागला: (सोपे)

(A) 13 प्रकरणे (13 chapters)

(B) 12 प्रकरणे (12 chapters)

(C) 11 प्रकरणे (11 chapters)

(D) 9 प्रकरणे (9 chapters)

8. यूक्लिडच्या मूलतत्त्वाला (axiom) लागू न होणारे विधान : (सरासरी)

(A) जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात, ते परस्पराशी समान असतात.

(B) जर समान घटकात समान घटक मिळविल्यास, उत्तर समान येते.

(C) समान घटकांमधून समान घटक वजा केल्यास, उत्तर समान येते.

(D) पूर्ण हा त्याच्या खंडा पेक्षा लहान असतो.

9. खालीलपैकी योग्य विधान आहे: (सरासरी)

(A) एकाच बिंदूतून फक्त एक रेषा काढता येते.

(B) दोन भिन्न बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात.

(C) एक रेषाखंड दोन्ही बाजूंनी अमर्यादितपणे वाढवता येते.

(D) जर दोन वर्तुळे एकरूप असतील, तर त्यांच्या त्रिज्या असमान असतात.

10. जर a=6 आणि b=a, तर b=6. हे या मूलतत्त्वाचे उदाहरण आहे: (सोपे)

(A) जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात, ते परस्पराशी समान असतात.

(B) जर समान घटकात समान घटक मिळविल्यास उत्तर, समान येते.

(C) जर समान घटकातून समान घटक वजा केल्यास, उर्वरित उत्तर समान येते.

(D) पूर्ण हा त्याच्या खंडा पेक्षा मोठा असतो.

10.एक पिरॅमिड ही एक घन आकृती आहे, ज्याचा पाया असतो: (सोपे)

(A) फक्त त्रिकोण (only a triangle)

(B) फक्त चौरस (only a square)

(C) फक्त आयत (only a rectangle)

(D) कोणताही बहुभुजाकृती (any polygon)

11. पिरॅमिडच्या बाजूच्या बाजू (side faces) असतात: (सोपे)

(A) त्रिकोण (Triangles)

(B) चौरस (Squares)

(C) बहुभुज (Polygons)

(D) समलंब चौकोन (Trapeziums)

12. सिंधू संस्कृतीत (सुमारे 3000 ईसापूर्व), बांधकाम कामासाठी वापरल्या जाणाऱ्या विटांचे परिमाण या गुणोत्तरात होते: (सोपे)

(A) 1 : 3 : 4

(B) 4 : 2 : 1

(C) 4 : 4 : 1

(D) 4 : 3 : 2

14. एका बिंदूला किती मिती (dimensions) असतात? (सोपे)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

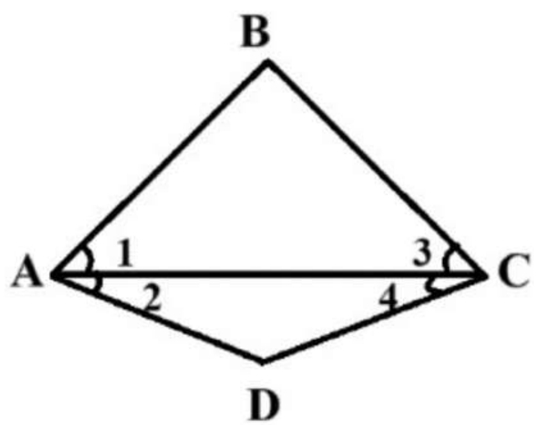
II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

15. यूक्लिडचे कोणतेही एक **गृहित तत्व (postulate)** लिहा. (सोपे)
16. यूक्लिडियन भूमितीवर आधारित **बिंदूची** व्याख्या करा. (सोपे)
17. **किरणाची (ray)** व्याख्या करा. (सोपे)
18. यूक्लिडच्या भूमितीचे महत्त्व लिहा. (सोपे)
19. **प्रतलाची (plane)** व्याख्या करा. (सरासरी)
20. दोन अंत्यबिंदू असलेल्या **रेषेच्या भागाला** काय म्हणतात? (सोपे)
21. **रेषेच्या** मिती (dimensions) लिहा. (सोपे)
22. **लंब रेषां(perpendicular lines)** व्याख्या लिहा. (सोपे)
23. यूक्लिडच्या प्रसिद्ध **पुस्तकाचे** नाव लिहा. (सोपे)
24. दोन भिन्न रेषां मध्ये किती **सामाईक बिंदू (common points)** असू शकतात? (सोपे)

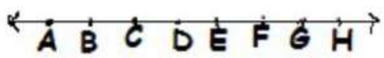
III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (दोन गुणांचे प्रश्न)

25. **मूलतत्त्वे (axioms)** आणि **गृहित तत्वे (postulates)** यांच्यातील फरक स्पष्ट करा. (सरासरी)
26. A आणि B यांचे वजन तंतोतंत समान आहे. जर त्यांनी दिलेल्या वेळेत प्रत्येकी 2 किलो वजन वाढवले, तर त्यांच्या नवीन वजनांची तुलना कशी कराल? तुमचे उत्तराचे **समर्थन (justify)** करा. (सरासरी)

27. शेजारील आकृतीमध्ये ∠1=∠3 आणि ∠2=∠4 आहे. दर्शवा की ∠A=∠C. (सरासरी)



28. खालील आकृतीमध्ये, **दाखवा** की AH ची लांबी AB + BC + CD पेक्षा जास्त आहे. (सरासरी)



29. खालील संज्ञांची व्याख्या करा: (सोपे)

i) लंब रेषा (Perpendicular lines)

ii) रेषाखंड (A line segment)

30. व्याख्या करा: (सोपे)

a) एकरेषीय बिंदू (Collinear points)

b) नैक रेषीय बिंदू (Non-collinear points)

IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुण)

31. जर बिंदू C हा A आणि B च्या दरम्यान असेल आणि AC=21AB असेल. तर आकृती काढून स्पष्ट करा.
32. आकृतीमध्ये, जर AC=BD असेल, तर सिद्ध करा की AB=CD.
33. खालील विधानांसाठी खरे किंवा खोटे लिहा.

i) एका बिंदूतून फक्त एक रेषा जाऊ शकते.

ii) दोन भिन्न बिंदूतून जाणाऱ्या अनंत रेषा असतात.

iii) जर दोन वर्तुळे एकरूप असतील (तर त्यांच्या त्रिज्या समान असतात).

V. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (चार गुण)

34. यूक्लिडच्या भूमितीचे कोणतेही पाच **मूलतत्त्वे (axioms)** लिहा.
35. यूक्लिडच्या भूमितीचे कोणतेही पाच **गृहित तत्वे (postulates)** लिहा.
36. खालील आकृतीमध्ये, खालील गोष्टींना नावे द्या:

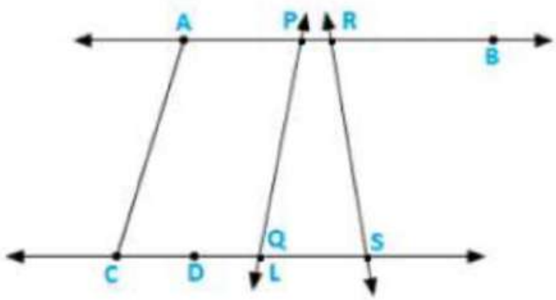
(i) कोणतेही दोन रेषाखंड (line segments)

(ii) कोणतेही दोन किरण (rays)

(iii) चार एकरेषीय बिंदू (Four collinear points)

(iv) न छेदणाऱ्या रेषाखंडांची एक जोडी (one pair of non-intersecting line segments)

(v) समांतर रेषा (parallel lines)



I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions -Answers)

1. (A) प्रमेय
2. (C) ग्रीस
3. (A) परस्परांशी समान
4. (A) कोणत्याही पुराव्याची गरज नसलेली वैश्विक सत्ये.
5. (A) घन-पृष्ठभाग-रेषा-बिंदू
6. (B) वक्र
7. (A) 13 प्रकरणे
8. (D) पूर्ण वस्तू तिच्या भागापेक्षा लहान असते
9. (C) एक रेषाखंड दोन्ही बाजूंनी अमर्यादितपणे वाढवता येतो
10. (A) जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात, ते परस्पराशी समान असतात. (D) कोणताही बहुभुज
11. (A) त्रिकोण
12. (B) 4 : 2 : 1
13. (A) 0

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

15. कोणत्याही एका बिंदूतून दुसऱ्या कोणत्याही बिंदूपर्यंत सरळ रेषा काढता येते.
16. अशी **जागा** (स्थान) ज्याला लांबी, रुंदी किंवा जाडी नसते.
17. **रेषेचा** असा भाग जो एका बिंदूतून सुरू होतो आणि एका दिशेने अनंतपर्यंत पसरतो.
18. यामुळे **गैर-यूक्लिडियन भूमितीचा** विकास झाला.
19. एक **सपाट** द्वि-मितीय पृष्ठभाग जो सर्व दिशांनी अनंतपर्यंत पसरतो.
20. **रेषाखंड**
21. **एक**
22. **लंब रेषा** म्हणजे अशा दोन रेषा ज्या एकमेकांना छेदून काटकोन (90 अंश) तयार करतात.
23. **द एलिमेंट्स**
24. **एक**

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

25. **मूलतत्त्वे (Axioms)** आणि **गृहीतके (Postulates)** यांच्यातील फरक:

मूलतत्त्वे (Axioms)	गृहित तत्वे (Postulates)
1) 25. मूलतत्त्वे हे **स्वयंसिद्ध सत्य** आहे.	1) गृहीत तत्वे हे **स्वयंसिद्ध सत्य नसते**.
2) याला **पुराव्याची आवश्यकता नसते**.	2) हे असे विधान आहे जे **इतर विधाने सिद्ध करण्यासाठी सत्य मानले जाते**.
3) हे **गणिताच्या सर्व शाखांना लागू** होते.	3) हे **फक्त भूमितीला लागू** होते.

---

26. राम आणि रवी या प्रत्येकाचे वजन x किलो मानू.

प्रत्येकी 2 किलो वजन वाढवल्यावर,

राम आणि रवी या प्रत्येकाचे वजन (x+2) किलो होईल.

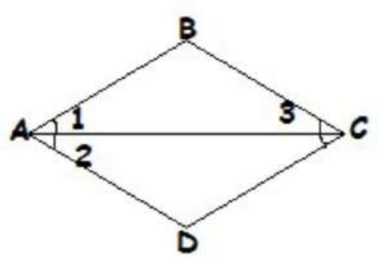
यूक्लिडच्या मूलतत्त्वा, प्रमाणे समान घटकात समान घटक मिळविल्यास , उत्तर (बेरीज) समान येते.

म्हणून, राम आणि रवीचे नवीन वजन समान असेल.

प्रत्येकी 2 किलो वजन वाढवल्यावर,

राम आणि रवी या प्रत्येकाचे वजन (x+2) किलो होईल.

यूक्लिडच्या दुसऱ्या स्वयंसिद्धाप्रमाणे, जर समान जर समान घटकात समान घटक मिळविल्यास उत्तर, समान येते.



27. दिलेले आहे: $\angle 1=\angle 3$ --------------- (i)

आणि $\angle 2=\angle 4$ ----------- (ii)

यूक्लिडच्या स्वयंसिद्ध 2 नुसार, "जर समान घटकात समान घटक मिळविल्या, तर उत्तर (बेरीज) समान येते."

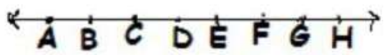
समीकरण (i) आणि (ii) यांची बेरीज केल्यास, आपल्याला मिळते:

$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$

$\angle A=\angle C$

---

28. आपल्याला मिळते:



AH=AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH

AB+BC+CD हा AH चा एक भाग आहे.

यूक्लिडच्या स्वयंसिद्धाप्रमाणे, "पूर्ण (whole) हा त्याच्या खंडा पेक्षा (part) मोठा असतो."

म्हणून, AH>AB+BC+CD

∴ AH ची लांबी ही AB+BC+CD च्या लांबीच्या बेरजेपेक्षा मोठी आहे.

Here's the Marathi translation of the provided text, including the corrections for the definitions:

---

29. i) लंब रेषा (Perpendicular lines):

लंब रेषा (Perpendicular lines) म्हणजे अशा दोन रेषा ज्या एकमेकांना काटकोनात (90 अंशावर) छेदतात.

(टीप: दिलेल्या व्याख्येत 'never intersect' (कधीही छेदत नाहीत) असे म्हटले आहे, जे समांतर रेषांची व्याख्या आहे. लंब रेषा एकमेकांना छेदतात.)

ii) रेषाखंड (Line segment):

एका रेषेचा असा भाग ज्याला दोन अंत्यबिंदू (end points) असतात, त्याला रेषाखंड म्हणतात.

30. a) एकरेषीय बिंदू (Collinear points):

जे बिंदू एकाच रेषेवर (same line) असतात, त्यांना एकरेषीय बिंदू म्हणतात.

b) नैक रेषीय बिंदू (Non-collinear points):

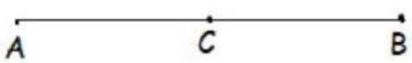
जे बिंदू एकाच रेषेवर नसतात, त्यांना नैक एकरेषीय बिंदू म्हणतात.

(टीप: दिलेल्या व्याख्येत 'collinear points' असे म्हटले आहे, जे 'non-collinear points' असावे.)

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

31. दिलेले आहे: आकृतीमध्ये AC=BC

सिद्ध करा: AC=21AB



पुरावा:

AC=BC (दिलेले आहे)

आता दोन्ही बाजूंना AC मिळवू.

AC+AC=BC+AC

2AC=BC+AC

आपल्याला माहीत आहे की BC+AC=AB (कारण ते रेषाखंड AB शी जुळते)

2AC=AB (यूक्लिडच्या स्वयंसिद्धाप्रमाणे, जर समान गोष्टींमध्ये समान गोष्टी जोडल्या जातात, तर पूर्ण गोष्टी समान असतात.)

AC=1/2AB

---

32. दिलेले आहे: AC=BD



सिद्ध करा: AB=CD (टीप: 'डेटा' मध्ये AB=CD दिलेले आहे आणि 'टू प्रूव' मध्ये देखील AB=CD सिद्ध करायचे आहे, जे कदाचित टायपो असावा. 'डेटा' मध्ये AC=BD असल्याने, 'टू प्रूव' मध्ये AB=CD हे योग्य असेल.)

पुरावा:

AC=BD (दिलेले आहे)

AC=AB+BC

BD=BC+CD

म्हणून, AB+BC=BC+CD (कारण AC=BD दिलेले आहे)

यूक्लिडच्या स्वयंसिद्धाप्रमाणे, "जेव्हा समान घटकातून समान घटक वजा केल्या स, उत्तर समान येते."

AB+BC–BC=BC+CD–BC

AB=CD

म्हणून सिद्ध झाले.

Here's the Marathi translation of the provided answers:

---

33. i) खोटे (False),

एकाच बिंदूतून असंख्य रेषा काढता येतात. त्यामुळे दिलेले विधान खोटे आहे.

ii) खोटे (False),

दोन भिन्न बिंदूतून फक्त एकच रेषा काढता येते. त्यामुळे दिलेले विधान खोटे आहे.

iii) खरे (True),

वर्तुळे एकरूप असतात, याचा अर्थ त्या एकमेकांवर तंतोतंत जुळतात. त्यामुळे दोन्ही वर्तुळांची त्रिज्या समान असावी. म्हणून दिलेले विधान खरे आहे; जेव्हा दोन वर्तुळे एकरूप असतात, तेव्हा त्यांची त्रिज्या समान असते. तसेच, दोन्ही वर्तुळांचा परिघ आणि केंद्र समान असतात.

V. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

34. **यूक्लिडची पाच मूलतत्त्वे (Axioms):**

1. जे घटक एकाच घटकाशी समान असतात, त्या एकमेकाशी समान असतात.
2. जर समान घटकात समान घटक मिळविल्यास, उत्तर समान येते.
3. जर समान घटकातून समान घटक वजा केल्यास, उत्तर समान येते

4. ज्या वस्तू एकमेकांवर तंतोतंत जुळतात, त्या एकमेकांच्या समान असतात.

5. पूर्ण (whole) हा त्याच्या खंडा पेक्षा (part) मोठा असतो

(टीप: दिलेल्या यादीत एकूण सात स्वयंसिद्धे आहेत; प्रश्नात 'पाच' विचारले आहेत.)

6. समान घटकांची दुप्पट ही समान असते

7. समान घटकांची निम्मपट ही समान असते

35. **यूक्लिडची पाच गृहीत तत्वे (Postulates):**
1. **यूक्लिडचे गृहीतक 1:** एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत एक सरळ रेषा काढता येते.
2. **यूक्लिडचे गृहीतक 2:** एक रेषखंड अमर्यादितपणे वाढवता येतो
3. **यूक्लिडचे गृहीतक 3:** एखादा रेषाखंड दिला असता, रेषखंड ही त्रिज्या आणि त्याचा एक अंत्यबिंदु मध्य घेऊन वर्तुळ काढता येते.
4. **यूक्लिडचे गृहीतक 4:** सर्व काटकोन एकरूप असतात.
5. **यूक्लिडचे गृहीतक 5:** जर एक सरळ रेषादुसऱ्या दोन सरळ रेषांना अशा प्रकारे छेदते की, एकाच बाजूला असणारे दोनआंतरकोन एकत्रपणे दोन काटकोनांपेक्षा लहान असतात , जर दुसरी सरळ रेषा, त्या बाजूला वाढविली तर छेदल्यामुळे, जे कोन होतात ते दोन काटकोनांपेक्षा लहान असतात.

---

36. (आकृती प्रदान न केल्यामुळे, हे बिंदू आणि रेषा दिलेल्या उत्तरांनुसार गृहीत धरले आहेत.)

i) दोन रेषाखंड: AC आणि CD

ii) दोन किरण: QL आणि RB

iii) चार एकरेषीय बिंदू: C, D, Q आणि S

iv) न छेदणाऱ्या रेषाखंडांची एक जोडी: AB ∥ CS (AB समांतर CS)

v) समांतर रेषा: AB ∥ CS (AB समांतर CS)

प्रकरण – ६ रेषा आणि कोन

अध्ययन निष्पत्ती:

१. रेषा आणि कोनांची व्याख्या आणि वर्गीकरण शिकणे.

२. कोनांचे गुणधर्म समजून घेणे.

३. कोनांशी संबंधित प्रमेय समस्या सोडवण्यासाठी लागू करणे.

४. कोनांच्या जोड्या आणि त्यांचे गुणधर्म तपासणे.

अध्ययन अंश

1. मूलभूत घटक आणि व्याख्या.

2. छेदणाऱ्या रेषा आणि न छेदणाऱ्या रेषा.

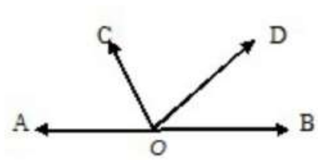
3. कोनांच्या जोड्या.

4. एकाच रेषेला समांतर रेषा.

सोपे (EASY)	सरासरी (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
29	19	17	65

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. दिलेल्या आकृतीमध्ये, AOB ही एक सरळ रेषा आहे. जर $\angle AOC+\angle BOD=85^\circ$ असेल, तर $\angle COD$चेमापकिती?(सोपे)



(A) 85°

(B) 90°

(C) 95°

(D)100°

2. पूरक कोनांची अशी जोडी, ज्यात एक कोन दुसऱ्या कोनाच्या निम्मा आहे, ती कोणती? (सोपे)$

(A) 50°, 40°

(B) 120°, 60°

(C) 55°, 35°

(D) 60°, 30°

३. एकाच रेषेवरील दोन लगतचे कोन हे कसे असतात? (सोपे)$

(A) विरुद्ध कोन

(B) पूरक कोन

(C) रेषीय जोडीतील कोन

(D) प्रविशाल कोन

४. जेव्हा दोन रेषा एकमेकांना छेदतात, तेव्हा योग्य विधान कोणते आहे? (सोपे)$

(A) लगतचे कोन नेहमी पूरक असतात.

(B) लगतचे कोन नेहमी संपूरक असतात.

(C) विरुद्ध कोन नेहमी संपूरक असतात.

(D) विरुद्ध कोन नेहमी पूरक असतात.

5. जर दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता, छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील दोन आंतरकोन 2:3या प्रमाणात असतील, तर मोठ्या कोनाचे माप किती? (सरासरी)

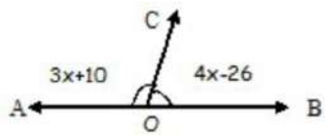
(A) 54°

(B) 120°

(C) 108°

(D) 136°

6. दिलेल्या आकृतीमध्ये, AOB ही एक सरळ रेषा आहे. जर ∠AOC=(3x+10)° आणि ∠BOC=(4x–26)° असेल, तर $\angle BOC चे माप किती? (सरासरी)



(A) 96°

(B) 86°

(C) 76°

(D) 106°

7. खालीलपैकी कोणते विधान सत्य नाही? (सोपे)

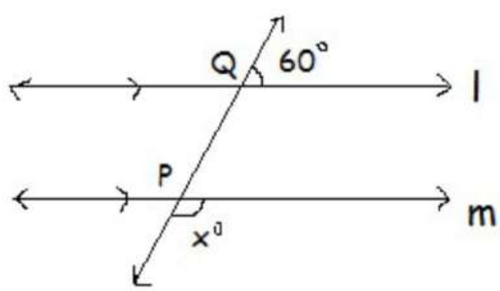
(A) दिलेल्या बिंदूतून फक्त एक सरळ रेषा काढता येते.

(B) दिलेल्या दोन बिंदूतून एक आणि फक्त एक सरळ रेषा काढणे शक्य आहे.

(C) दोन सरळ रेषा फक्त एकाच बिंदूत छेदू शकतात.

(D) एक रेषा कोणत्याही इच्छित लांबीपर्यंत वाढवता येते.

8. दिलेल्या आकृतीमध्ये 'x' चे माप किती आहे? (सोपे)



(A) 60°

(B) 90°

(C) 120°

(D) 64°

9. जर एक किरण एका रेषेवर उभा असेल, तर तयार झालेल्या दोन लगतच्या कोनांची बेरीज किती असते? (सोपे)

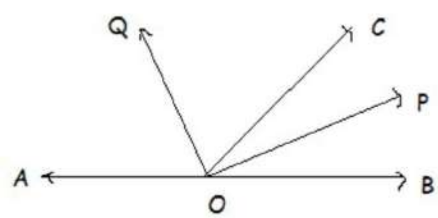
(A) 360°

(B) 90°

(C) 180°

(D) 45°

10. ∠AOC आणि ∠BOC या रेषीय जोडीतील कोनांच्या दुभाजकांमधील कोन कोणता असतो? (सोपे)



(A) काटकोन

(B) सरळ कोन

(C) प्रविशाल कोन

(D) लघुकोन

11. जर दोन रेषा एकमेकांना छेदत असतील, तर विरुद्ध कोन नेहमी कसे असतात? (सोपे)

(A) समान

(B) संपूरक

(C) असमान

(D) पूरक

12. 180° मापाच्या कोनाला काय म्हणतात? (सोपे)

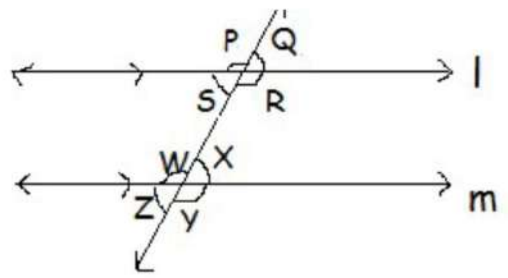
(A) विशालकोन

(B) सरळ कोन

(C) काटकोन

(D) लघुकोन

13. लगतच्या आकृतीत R चा व्युत्क्रम कोन (alternate angle) कोणता आहे? (सोपे)



(A) W

(B) X

(C) Y

(D) Z

14. जो किरण कोनाला दोन समान कोनांमध्ये विभाजित करतो, त्याला काय म्हणतात? (सोपे)

(A) लंब दुभाजक

(B) कोन दुभाजक

(C) छेदिका

(D) शिरोबिंदू

15. खालीलपैकी कोणते प्रविशाल कोनाचे (reflex angle) उदाहरण आहे? (सोपे)

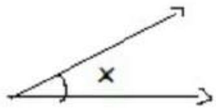
(A) 45°

(B) 120°

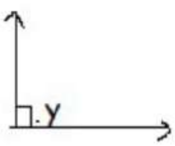
(C) 180°

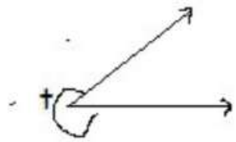
(D) 270°

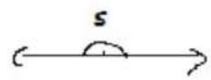
16. सरळ कोन (straight angle) दर्शवणारी आकृती कोणती आहे? (सोपे)



(A)







(B) (C) (D)

(टीप: येथे आकृत्या दिल्या नसल्यामुळे, तुम्हाला योग्य आकृती निवडायची आहे जी 180 अंशाचा कोन दर्शवते.)

17. सरळ कोन बनवण्यासाठी किती काटकोन (right angles) लागतात? (सोपे)

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

18. पूर्ण कोन (complete angle) बनवण्यासाठी किती काटकोन लागतात? (सोपे)

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

19. पूर्ण कोन बनवण्यासाठी किती सरळ कोन लागतात? (सोपे)

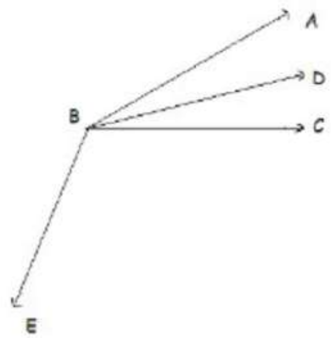
(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

20. दिलेल्या आकृतीमध्ये, ∠ABD आणि ∠DBC या कोनांसाठी सामायिक बाजू (common side) कोणती आहे? (सोपे)



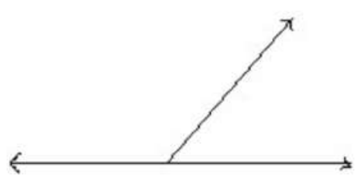
(A) AB

(B) BD

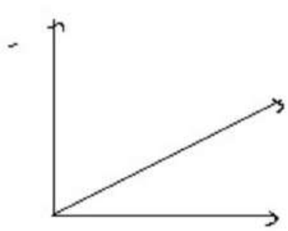
(C) BC

(D) AE

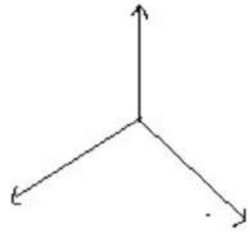
21. खालील आकृत्यांपैकी रेषीय जोडीतील कोन (Linear pair of angles) कोणती आहे? (सोपे)



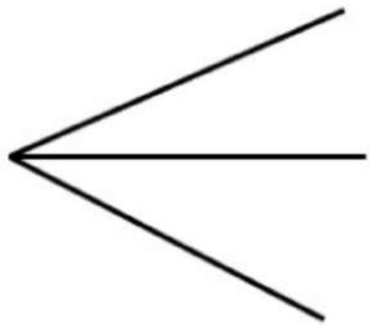
(A) (आकृती A)



(B) (आकृती B)



(C) (आकृती C)



(D) (आकृती D)

(टीप: येथे आकृत्या दिल्या नसल्यामुळे, तुम्हाला योग्य आकृती निवडायची आहे जी रेषीय जोडी दर्शवते.)

22. 45° चा पूरक कोन (complementary angle) कोणता आहे? (सोपे)

(A) 45°

(B) 30°

(C) 90°

(D) 60°

23. 120° चा संपूरक कोन (supplementary angle) कोणता आहे? (सोपे)

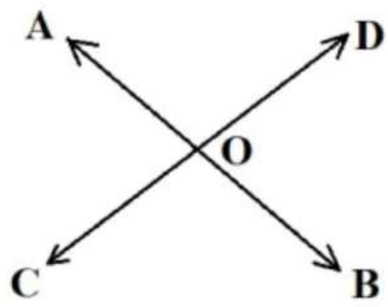
(A) 20°

(B) 40°

(C) 60°

(D) 180°

24. दिलेल्या आकृतीमध्ये विरुद्ध कोनांची (vertically opposite angle) एक जोडी कोणती आहे? (सोपे)



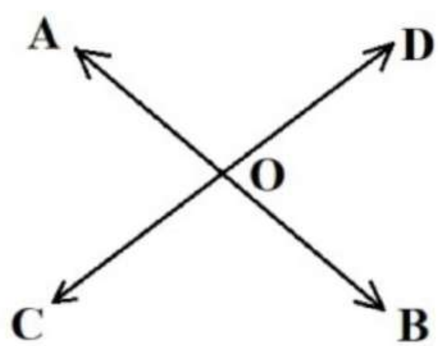
(A) ∠AOC=∠COB

(B) ∠AOC=∠DOB

(C) ∠AOD=∠AOC

(D) ∠DOB=∠BOC

25. दिलेल्या आकृतीमध्ये लगतच्या कोनांची (adjacent angles) एक जोडी कोणती आहे? (सोपे)



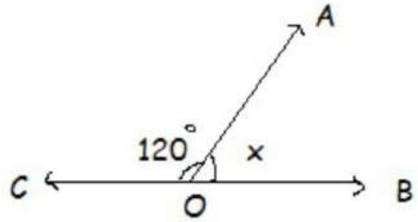
(A) ∠AOC आणि ∠COB

(B) ∠AOC आणि ∠DOB

(C) ∠AOD आणि ∠BOC

(D) ∠DOB आणि ∠COA

26. आकृतीमध्ये, x चे मूल्य किती आहे? (सरासरी)



(A)40°

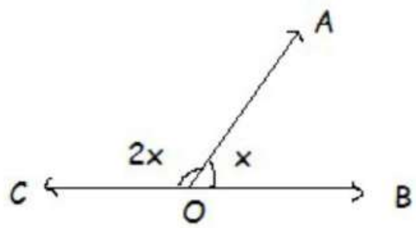
(B) 60°

(C) 80°

(D) 100°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती दिलेली नाही. योग्य उत्तर देण्यासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

27. आकृतीमध्ये, x चे मूल्य किती आहे? (सरासरी)



(A) 20°

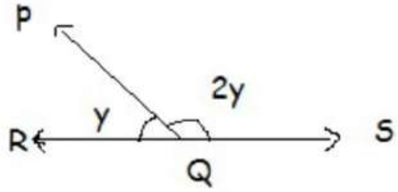
(B) 30°

(C) 45°

(D) 60°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती दिलेली नाही. योग्य उत्तर देण्यासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

28. आकृतीमध्ये, ∠PQR चे माप किती आहे? (सरासरी)



(A) 30°

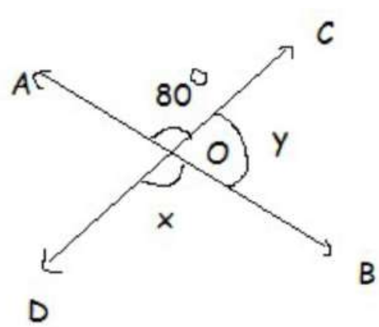
(B) 45°

(C) 120°

(D) 60°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती दिलेली नाही. योग्य उत्तर देण्यासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

29. आकृतीमध्ये, कोन X आणि Y ची बेरीज किती आहे? (सरासरी)



(A) 100°

(B) 180°

(C) 360°

(D) 540°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती दिलेली नाही. योग्य उत्तर देण्यासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

30. $\triangle ABC$ मध्ये, जर $AB=AC$ आणि $\angle BAC=40°$ असेल, तर $\angle B$ चे माप किती? (सरासरी)

(A) 60°

(B) 70°

(C) 100°

(D) 180°

31. 65° चा पूरक कोन (complementary angle) कोणता आहे? (सरासरी)

(A) 25°

(B) 35°

(C) 65°

(D) 75°

32. दोन अंत्यबिंदू असलेल्या रेषेच्या भागाला काय म्हणतात? (सोपे)

(A) रेषाखंड

(B) किरण

(C) समांतर रेषा

(D) छेदणाऱ्या रेषा

33. प्रविशाल कोनाचे (Reflex angle) माप कसे असते? (सोपे)

(A) 90° पेक्षा जास्त

(B) 90° इतके

(C) 180° पेक्षा जास्त आणि 360° पेक्षा कमी

(D) 180° इतके

34. दोन समांतर रेषांसाठी सामायिक बिंदूंची संख्या किती असते? (सोपे)

(A) एक बिंदू

(B) दोन बिंदू

(C) तीन बिंदू

(D) शून्य

35. एका त्रिकोणाचे कोन 5 : 3 : 7या प्रमाणात आहेत, तर तो त्रिकोण कोणता आहे? (सरासरी)

(A) काटकोन त्रिकोण

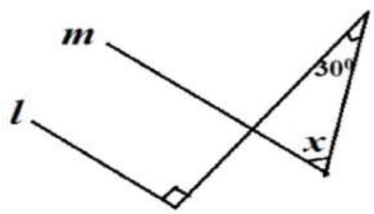
(B) लघुकोन त्रिकोण

(C) विशालकोन त्रिकोण

(D) समद्विभुज त्रिकोण

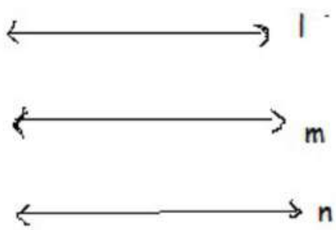
II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

36. आकृतीमध्ये जर l || m असेल, तर x चे माप शोधा. (सरासरी)

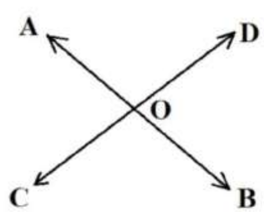


II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

37. दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर l || m आणि m || n असेल, तर रेषा l आणि n बद्दल तुम्ही काय सांगू शकता? (सरासरी)



38. दिलेल्या आकृतीमध्ये जर ∠DOB=60° असेल, तर ∠COA चे माप शोधा. (सरासरी)

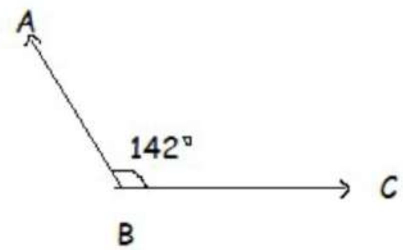


39. दोन कोनांचे माप (55°+ 3a) आणि (115° − 2a) आहे. जर प्रत्येक कोन दुसऱ्याचा संपूरक (supplement) असेल, तर a चे मूल्य काढा. (सरासरी)

40. विशालकोनाची (obtuse angle) व्याख्या लिहा. (सोपे)

41. एकरेषीय बिंदूंची (collinear points) व्याख्या लिहा. (सोपे)

42. जर ∠ABC=142° असेल, तर प्रविशाल ∠ABC चे माप शोधा. (सरासरी)

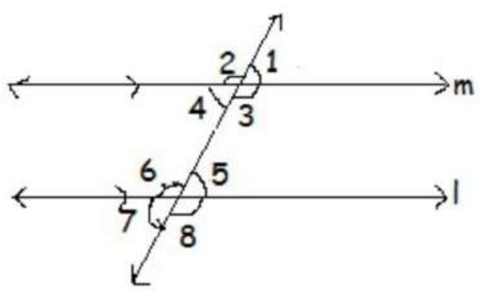


43. जर रेषीय जोडीतील एका कोनाचे माप 75° असेल, तर दुसऱ्या कोनाचे माप शोधा. (सरासरी)

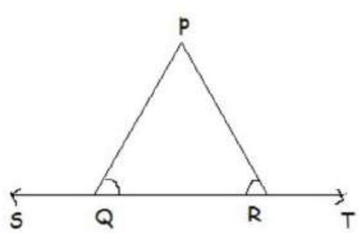
44. "सर्व संपूरक कोन रेषीय जोडी तयार करतात." हे सत्य आहे का? (सोपे)

III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

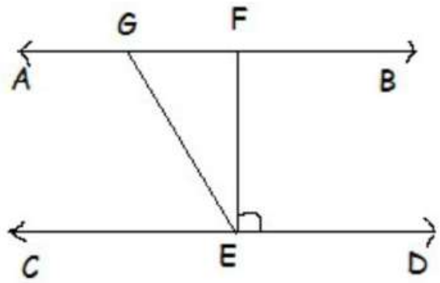
45. आकृतीमध्ये, जर ∠2 = 130° आणि ∠5 = 50° असेल, तर m||n आहे का ते शोधा आणि तुमच्या उत्तराचे कारण द्या. (सरासरी)



46. आकृतीमध्ये, ∠PQR=∠PRQ असेल, तर सिद्ध करा की ∠PQS=∠PRT. (सरासरी)

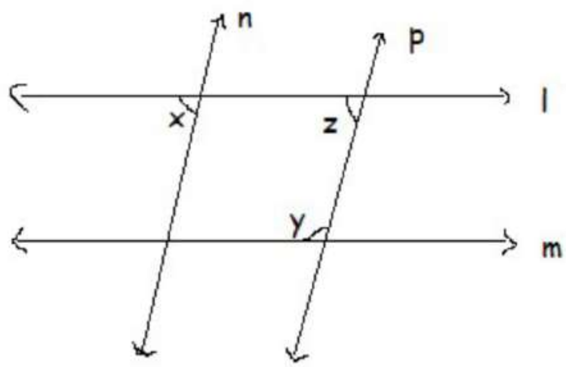


47. आकृतीमध्ये, जर AB || CD, EF || CD आणि ∠GED=126° असेल, तर ∠GED चे माप शोधा. (कठीण)

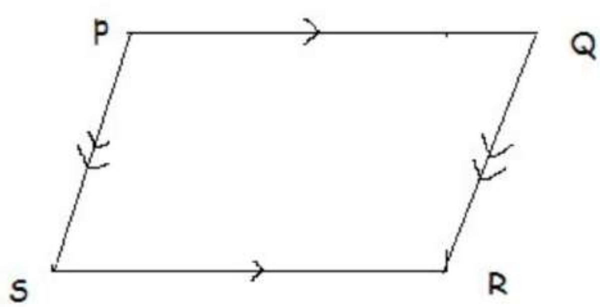


III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

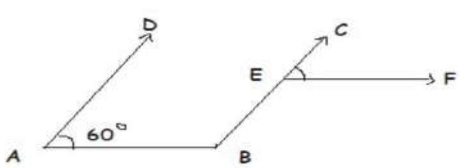
48. आकृतीमध्ये, जर l || m आणि n || p असेल, आणि ∠X=85° असेल, तर ∠Y चे माप शोधा. (कठीण)



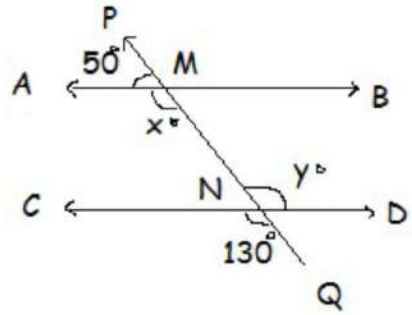
49. आकृतीमध्ये PQ || SR आणि PS || QR. सिद्ध करा की ∠SPQ=∠SRQ. (कठीण)



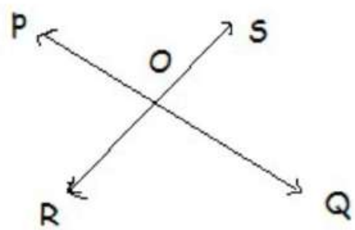
50. आकृतीमध्ये AD || BC आणि EF || AB, ∠DAB=60° असेल, तर ∠CEF चे माप शोधा. (कठीण)



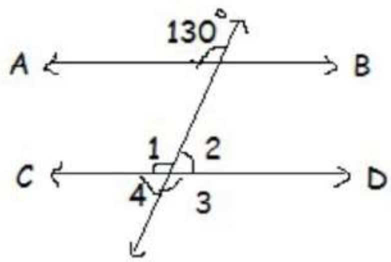
51. दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर AB||CD असेल, तर x आणि y ची मापे शोधा. (कठीण)



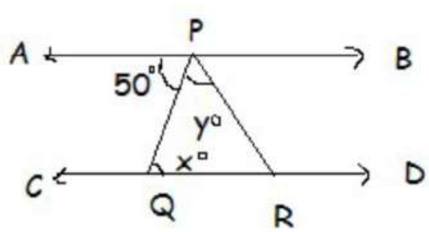
52. आकृतीमध्ये रेषा PQ आणि RS एकमेकांना O बिंदूत छेदतात. जर ∠POR:∠ROQ= 5:7असेल, तर सर्व कोनांची मापे शोधा. (कठीण)



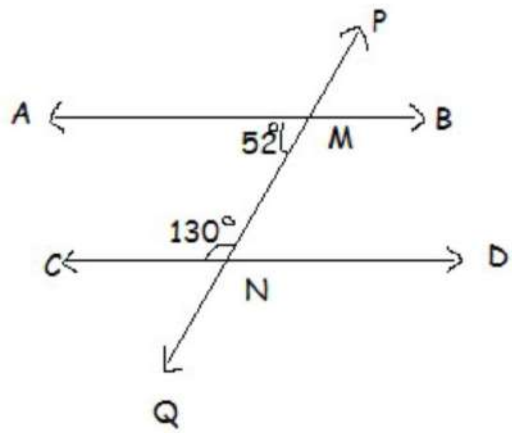
53. दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर AB||CD असेल, तर ∠1,∠2,∠3 आणि ∠4 ची मापे शोधा. (कठीण)



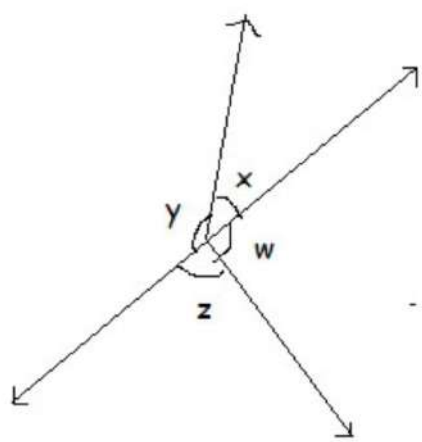
54. आकृतीमध्ये, जर AB||CD, ∠APQ=50° आणि ∠PRD=120° असेल, तर x आणि y ची मापे शोधा. (कठीण)



55. आकृतीमध्ये, AB || CD आहे का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा. (कठीण)

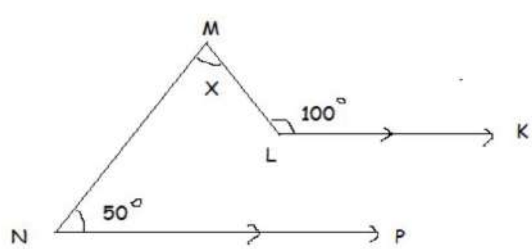


56. आकृतीमध्ये जर X + Y = W + Z असेल, तर सिद्ध करा की AOB ही एक रेषा आहे. (कठीण)



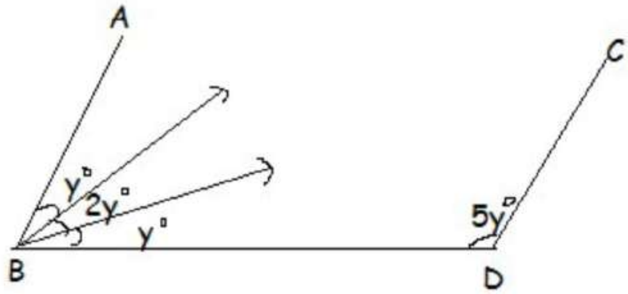
IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

57. दिलेल्या आकृतीमध्ये, LK||NP, जर ∠MLK=100° आणि ∠MNP=50° असेल, तर 'x' चे माप शोधा. (कठीण)



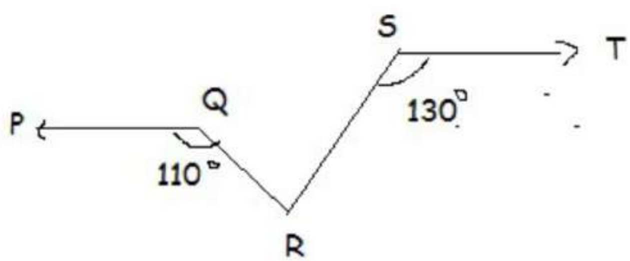
58. सिद्ध करा की, "ज्या रेषा एकाच रेषेला समांतर असतात, त्या एकमेकांना समांतर असतात." (सरासरी)

59. आकृतीमध्ये, जर रेषाखंड AB रेषाखंड CD ला समांतर असेल, तर 'y' आणि ∠CDB चे माप किती आहे? (कठीण)



60. सिद्ध करा की, "जर दोन रेषा एकमेकांना छेदत असतील, तर विरुद्ध कोन समान असतात." (सरासरी)

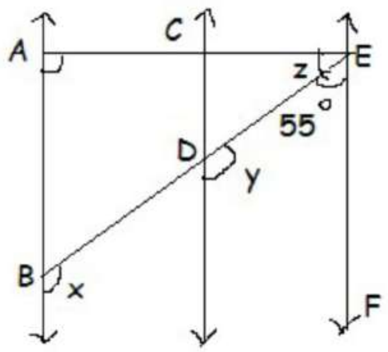
61. आकृतीमध्ये, जर PQ||ST, ∠PQR=110° आणि ∠RST=130° असेल, तर ∠QRS चे माप शोधा. (कठीण)



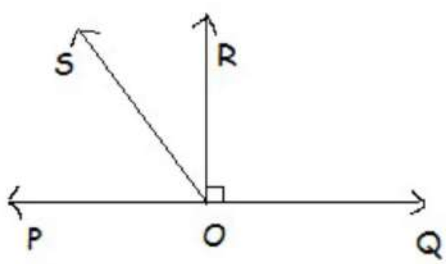
62. असे दिले आहे की ∠XYZ=64° आणि XY ला P बिंदूपर्यंत वाढवले आहे. दिलेल्या माहितीवरून आकृती काढा. जर किरण YQ हा ∠ZYP चा दुभाजक असेल, तर ∠XYQ आणि प्रविशाल ∠QYP ची मापे शोधा. (कठीण)

V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या (चार गुणांचे प्रश्न)

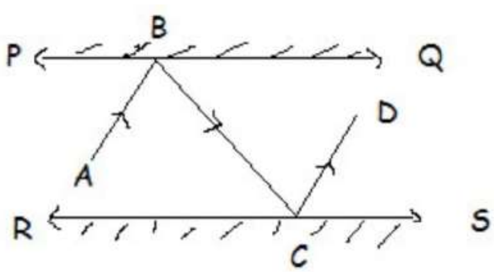
63. आकृतीमध्ये, AB||CD आणि CD||EF तसेच EA⊥AB, जर ∠BEF=55° असेल, तर x,y आणि z ची मापे शोधा. (कठीण)



64. आकृतीमध्ये, POQ ही एक रेषा आहे. किरण OR हा रेषा PQ ला लंब आहे. OS हा किरण OP आणि OR यांच्या दरम्यान आहे. सिद्ध करा की ∠ROS=1/2(∠QOS−∠POS). (कठीण)



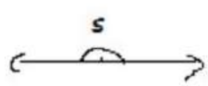
65. आकृतीमध्ये PQ आणि RS हे दोन आरसे एकमेकांना समांतर ठेवलेले आहेत. आपती किरण AB आरसा PQ ला B बिंदूत आदळतो, परावर्तित किरण BC मार्गाने जातो आणि आरसा RS ला C बिंदूत आदळतो आणि पुन्हा CD मार्गाने परावर्तित होतो. सिद्ध करा की AB||CD. (कठीण)



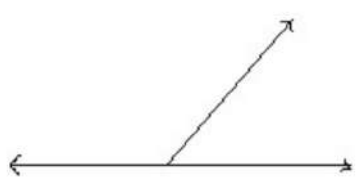
प्रकरण-6 रेषा आणि कोन (CHAPTER-6 LINES AND ANGLES)

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

- (C) 95°
- (D) 60°, **30°**
- (C) **रेषीय जोडीतील कोन (Linear pair angles)**
- (B) **लगतचे कोन नेहमी पूरक असतात (Adjacent angles are always supplementary)**
- (C) 108°
- (B) 86°
- (A) **दिलेल्या बिंदूतून, फक्त एक सरळ रेषा काढता येते (Through a given point, only one straight line can be drawn)**
- (C) 120°
- (C) 180°
- (A) **काटकोन (right angle)**
- (A) **समान (equal)**
- (B) **सरळ कोन (straight angle)**
- (A) **W**
- (B) **कोन दुभाजक (Angle bisector)**
- (D) 270°
- (D)



- (B) **२**
- (D) **४**
- (D) **२**
- (B) **BD**
- (A)



- (A) 45°
- (C) 60°

21. (B) **∠AOC=∠DOB**
22. (C) **∠DOB आणि ∠DOA**
23. (B) 60°
24. (D) 60°
25. (D) 60°
26. (B) 180°
27. (B) 70°
28. (A) 25°
29. (A) **रेषाखंड (line segment)**
30. (C) 180° **पेक्षा जास्त आणि 360° पेक्षा कमी (More than 180° and less than 360°)**
31. (D) **काहीही नाही (Nill)**
32. (B) **एक लघुकोन त्रिकोण (An acute angle triangle)**

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

36. **180° - 120° = 60°**
37. **l || n कारण ज्या रेषा एकाच रेषेला समांतर असतात, त्या एकमेकांना समांतर असतात.**
38. ∠DOB=∠COA=60° (विरुद्ध कोन / vertically opposite angle)

    ∴∠COA=60°

39. 55+3a+115–2a=180

    a+170 =80

    ∴a=10

40. **ज्या कोनाचे माप 90° पेक्षा जास्त आणि 180° पेक्षा कमी असते, त्याला विशालकोन (obtuse angle) म्हणतात.**
41. **जेव्हा तीन किंवा अधिक बिंदू एकाच रेषेवर येतात, तेव्हा त्यांना एकरेषीय बिंदू (collinear points) म्हणतात.**
42. प्रविशाल कोन (Reflex angle) ∠ABC=360°–142°

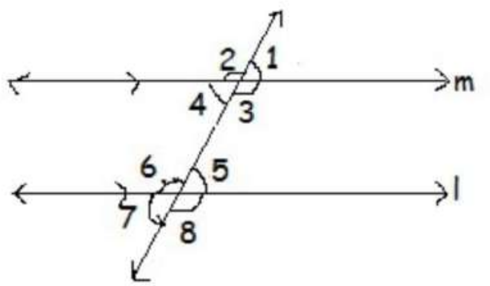
    ∠ABC=218°

43. **180° – 75° = 105°**
44. **असत्य (False)**

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

45.

होय, m || n (m, n ला समांतर आहे).



दिलेले आहे ∠2=130°=∠3 (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles).

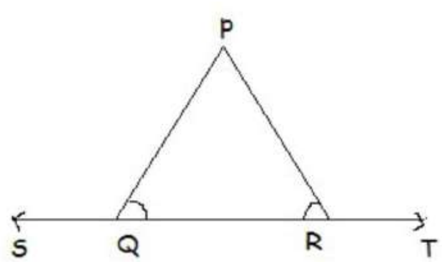
∠3+∠5=130°+50°=180°.

कारण छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील आंतरकोनांची बेरीज 180° असते.

∴ m || n.

46.

कारण ST ही एक सरळ रेषा आहे.



म्हणून, ∠PQS+∠PQR=180° (रेषीय जोडी / linear pair) आणि ∠PRT+∠PRQ=180° (रेषीय जोडी / linear pair).

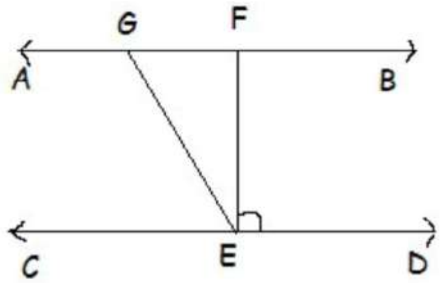
आता ∠PQS+∠PQR=∠PRT+∠PRQ=180°.

दिलेले आहे की ∠PQR=∠PRQ.

∴∠PQS=∠PRT. हे सिद्ध झाले.

47.

दिलेले आहे की AB || CD (AB, CD ला समांतर आहे), GE ही छेदिका आहे आणि ∠GED=126° (दिलेले).



म्हणून ∠GED=∠AGE=126° (व्युत्क्रम आंतरकोन / alternate interior angles).

तसेच, ∠GED=∠GEF+∠FED.

EF ⊥ CD असल्यामुळे, ∠FED=90°.

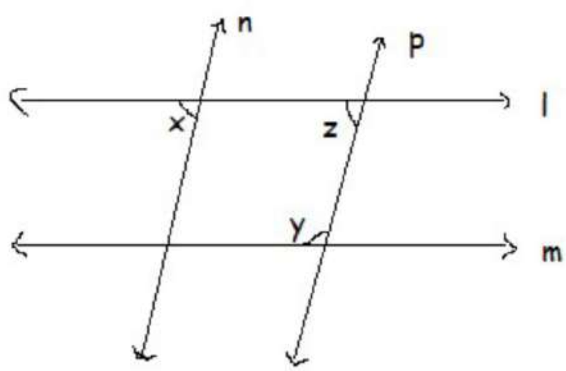
∴∠GED=∠GEF+90°.

∠GEF=126°−90°.

∠GEF=36°.

48.

दिलेले आहे l || m आणि n || p.



∠X=85°.

∠X=∠Z=85° (संगत कोन / Corresponding angles).

∠Y+∠Z=180°.

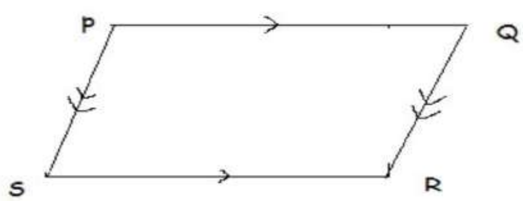
∠Y+85°=180°.

∠Y=95°.

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

49.

आकृतीमध्ये,



∠SPQ+∠PSR=180° ---------------- (1) (PQ || SR)

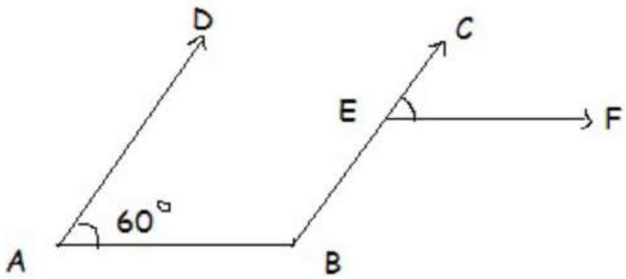
∠SRQ+∠PSR=180°_______________(2) (PS || QR)

(1) आणि (2) समीकरणांची तुलना केल्यास, आपल्याला मिळते:

∠SPQ=∠SRQ

50.

उत्तर: ∠DAB+∠CBA=180° (आंतरकोन / Co-interior angles)



$60° + \angle CBA = 180°$

$\angle CBA = 120°$

$\angle ABE = \angle BEF = 120°$ (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles)

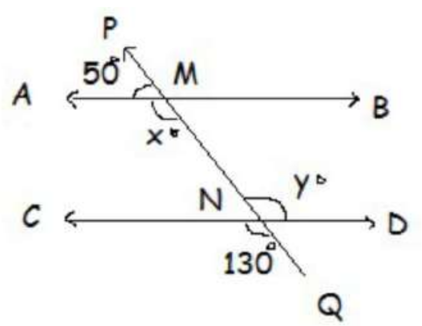
आता $\angle BEF + \angle CEF = 180°$ (रेषीय जोडी / linear pair)

$120° + \angle CEF = 180°$

$\angle CEF = 60°$

51.

उत्तर: $\angle PMA + \angle AMN = 180°$ (रेषीय जोडी / linear pair)



$50 + x = 180°$

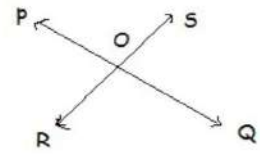
$x = 130°$

$\angle CNQ = \angle MND = 130°$ (विरुद्ध कोन / Vertically opposite angles)

$130° = y$

$y = 130°$

52.



उत्तर: ∠POR=125×180=75°

∠ROQ=127×180=105°

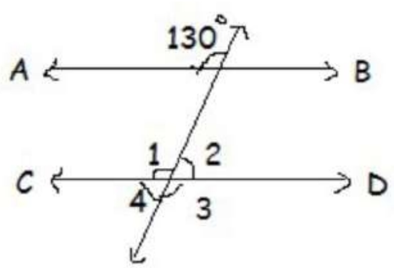
आता ∠POS=∠ROQ=105° (विरुद्ध कोन / Vertically opposite angles)

आणि ∠SOQ=∠POR=75°

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

53.

उत्तर:



∠1=130° (संगत कोन / corresponding angles)

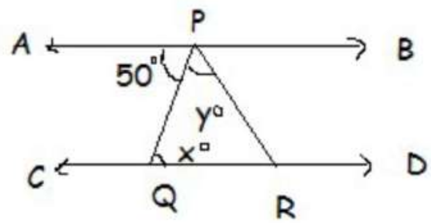
∠3=130° (विरुद्ध कोन / vertically opposite angles)

∠4=180°–130°=50° (रेषीय जोडीतील कोन / linear pair angles)

∠2=50° (विरुद्ध कोन / vertically opposite angles)

54.

उत्तर: AB || CD



X=∠APQ=50° (आंतर व्युत्क्रम कोन / interior alternate angles)

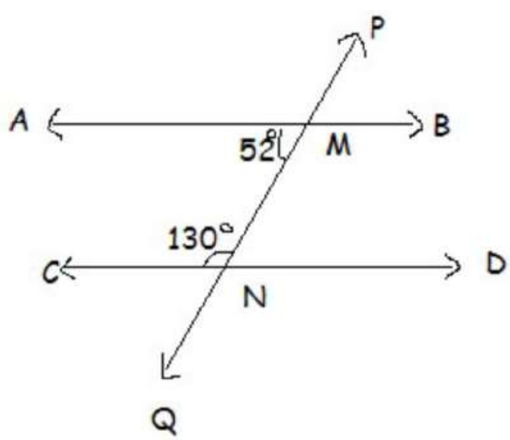
∠APR=∠PRD (आंतर व्युत्क्रम कोन / interior alternate angles)

Y=127°–50°=77°

X=50° आणि Y=77°

55.

उत्तर: 130°+52°=182°

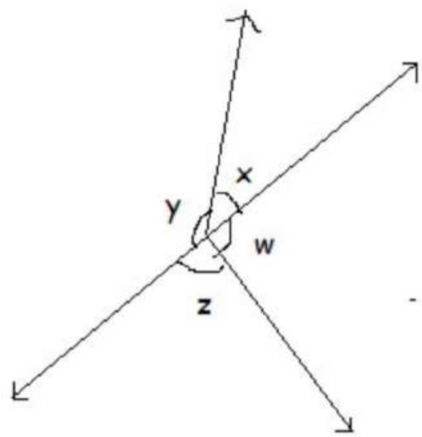


AB, CD ला समांतर नाही (छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील कोनांची बेरीज समान नाही).

(कारण छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील आंतरकोनांची बेरीज 180° असल्यास रेषा समांतर असतात, येथे ती 182° आहे.)

56.

माहिती: आकृतीमध्ये X+Y=W+Z



सिद्ध करायचे आहे: AOB ही एक सरळ रेषा आहे (किंवा) X+Y=180°.

सिद्धता: X+Y+W+Z=360° (एका बिंदूभोवतीचे कोन 360° असतात).

(X+Y)+(W+Z)=360°

2(X+Y)=360°

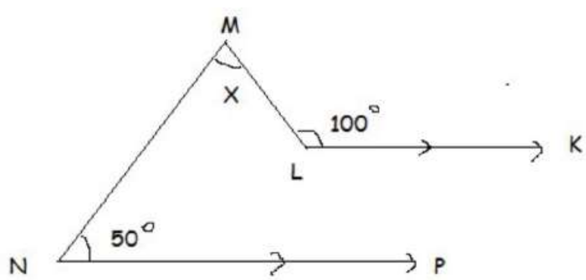
X+Y=180°

∴ AOB ही एक सरळ रेषा आहे.

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Mark Questions)

57.

दिलेले आहे ∠MLK=100°, ∠MNP=50°.



आकृतीमध्ये LK || NP. KL ही रेषा पुढे वाढवून MN ला O बिंदूत मिळते.

$\angle MOL=\angle MNP$ (संगत कोन / Corresponding angles).

$\therefore \angle MOL=50°$.

$\angle MLO+\angle MLK=180°$ (रेषीय जोडी / linear pair).

$\angle MLO+100°=180°$.

$\angle MLO=80°$.

$\triangle MOL$ मध्ये,

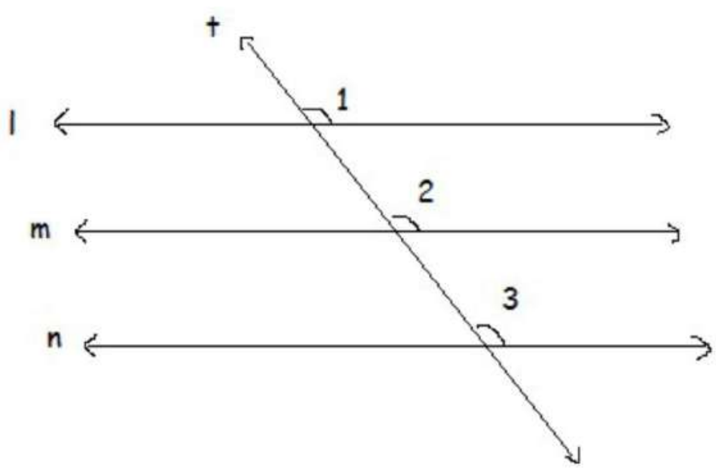
$\angle MOL+\angle MLO+\angle OML=180°$.

$50°+80°+X=180°$.

$X=50°$.

58.

माहिती: m || l आणि n || l



सिद्ध करायचे आहे: m || n

रचना: एक छेदिका 't' काढा.

सिद्धता:

∠1=∠2 (संगत कोन, l || m असल्यामुळे).

∠1=∠3 (संगत कोन, n || l असल्यामुळे).

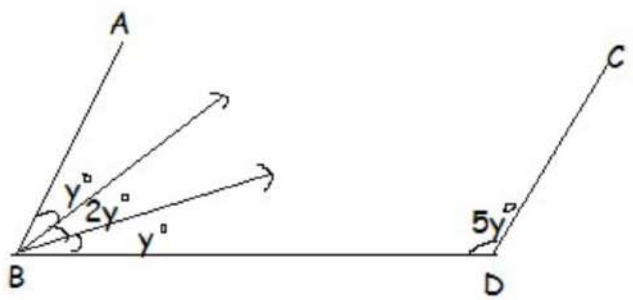
वरील माहितीवरून, ∠2=∠3.

परंतु हे संगत कोनांची जोडी आहे.

म्हणून m || n.

59.

आकृतीमध्ये,



AB || CD (दिलेले).

∠ABD+∠CDB=180° (छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील कोनांची बेरीज 180° असते).

y°+2y°+y°+5y°=180°

(टीप: येथे समीकरण अपूर्ण आहे, पुढे काय आहे ते स्पष्ट नाही. पूर्ण समीकरण असल्यास, ते सोडवून y ची किंमत काढता येईल.)

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Mark Questions)

59. (चालू)

9y°=180°

y°=20°

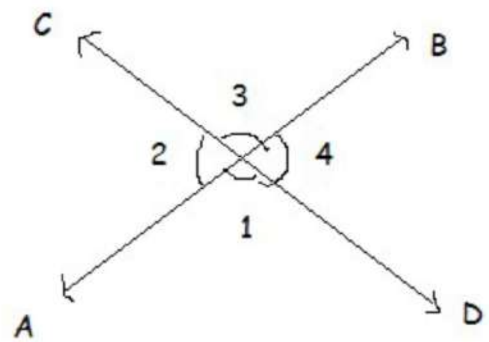
∴∠CDB=5y°

$=5\times20$

$\angle CDB=100°$

60.

दिलेले आहे: दोन रेषा AB आणि CD एकमेकांना 'O' बिंदूत छेदतात.



सिद्ध करायचे आहे: $\angle1=\angle3$ आणि $\angle2=\angle4$.

सिद्धता: आकृतीमध्ये

$\angle1+\angle2=180°$ ------------------------- (1) (रेषीय जोडीतील कोन / linear pair angles)

$\angle2+\angle3=180°$ ------------------------- (2)

(1) आणि (2) वरून

$\angle1+\angle2=\angle2+\angle3$

$\angle1=\angle3$

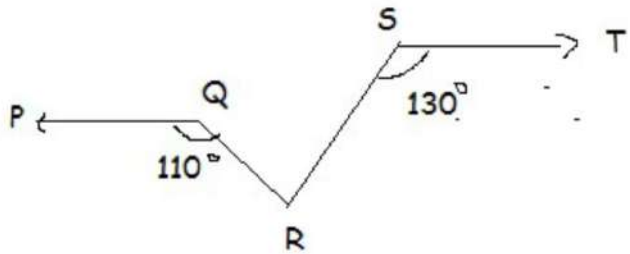
त्याचप्रमाणे,

$\angle2=\angle4$

$\angle1=\angle3$ आणि $\angle2=\angle4$ (विरुद्ध कोन समान असतात, हे सिद्ध झाले.)\

61.

उत्तर: ∠RST+∠SRB=180° (AB || ST काढले आहे)



∠SRB=180°–130°=50°

∠SRB=50°

PQ || ST

PQ || AB

∠QRB=∠PQR=110° (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles)

∠QRS+∠SRB=∠PQR

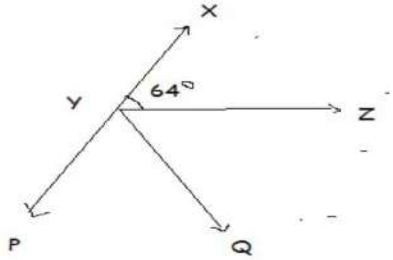
∠QRS+50°=110°

∠QRS=110°–50°

∠QRS=60°

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Mark Questions)

62. उत्तर: ∠XYZ=64° (YQ हा ∠ZYP चा दुभाजक आहे)



$\angle XYP=180°$

$\angle ZYQ+\angle XYZ+\angle QYP=180°$ (रेषीय कोन / linear)

$\angle ZYQ=\angle QYP=180°-64°/2=116°/2$

$\angle ZYQ=58°$

$\angle XYQ=64+58$

$\angle XYQ=122°$

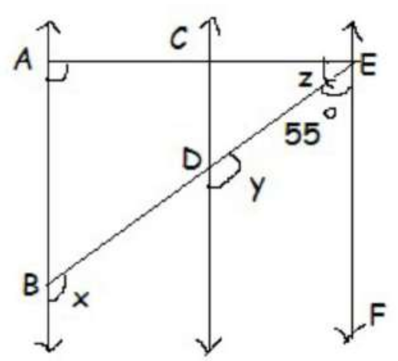
प्रविशाल $\angle QYP=360°-58°$

प्रविशाल $\angle QYP=302°$

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Mark Questions)

63.

$y+55=180°$ (छेदिका ED च्या एकाच बाजूकडील आंतरकोन / interior angles on the same side of the transversal ED)



$\therefore y=180°-55°=125°$

$y=125°$

पुन्हा, $x=y$ (AB || CD, संगत कोनांचे प्रमेय / corresponding angles axiom)

$\therefore x=125°$

आता, AB || CD आणि CD || EF असल्यामुळे

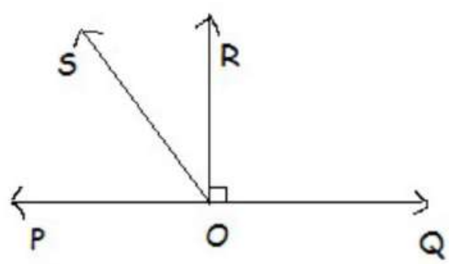
∴ AB || EF

म्हणून ∠EAB+∠FEA=180° (छेदिका EA च्या एकाच बाजूकडील आंतरकोन / Interior angles on the same side of the transversal EA)

∴90°+Z+55°=180°

म्हणून Z=35°

64.



प्रश्नामध्ये दिले आहे की (OR ⊥ PQ) आणि ∠POQ=180°

आपण असे लिहू शकतो की ∠ROP=∠ROQ=90°

आपल्याला माहीत आहे की

∠ROP=∠ROQ

हे असेही लिहिता येते:

(टीप: येथे सिद्धता अपूर्ण आहे. पुढचा भाग दिलेला नाही. संपूर्ण सिद्धता देण्यासाठी, उर्वरित भाग आवश्यक आहे.)

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Mark Questions)

64. (चालू)

∠POS+∠ROS=∠ROQ

$\angle POS + \angle ROS = \angle QOS - \angle ROS$

$\angle ROS + \angle ROS = \angle QOS - \angle POS$

म्हणून, आपल्याला मिळते

$2\angle ROS = \angle QOS - \angle POS$

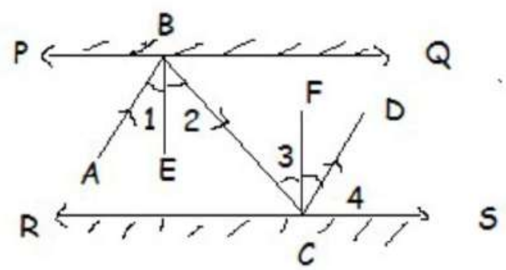
(किंवा)

$\angle ROS = 1/2(\angle QOS - \angle POS)$

हे सिद्ध झाले.

65.

उत्तर:



माहिती: आकृतीमध्ये

आरसा PQ || RS (PQ, RS ला समांतर आहे).

सिद्ध करायचे आहे: AB || CD (AB, CD ला समांतर आहे).

रचना: BE ⊥ PQ आणि CF ⊥ RS काढा.

सिद्धता:

आपल्याला माहीत आहे की आपती कोन (Angle of incidence) = परावर्तन कोन (Angle of reflection).

$\angle 1 = \angle 2$ (परावर्तनाच्या नियमांनुसार / by laws of reflection).

$\angle 3 = \angle 4$.

आपल्याला हे देखील माहीत आहे की व्युत्क्रम आंतरकोन समान असतात.

येथे BE ⊥ CF आहे आणि BC ही छेदिका त्यांना B आणि C बिंदूत छेदते.

म्हणून, ∠2=∠3 (कारण ते व्युत्क्रम आंतरकोन आहेत).

आता ∠1+∠2=∠3+∠4.

∠ABC=∠DCB.

म्हणून AB || CD (व्युत्क्रम आंतरकोन समान असल्यामुळे).

प्रकरण- त्रिकोणाच्या CHAPTER-7 Triangles

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

1. एकरूपतेच्या संकल्पना समजून घेणे आणि त्यांचा वापर करणे.

2. विविध त्रिकोणांचे गुणधर्म समजून घेणे आणि लागू करणे.

अध्ययन अंश (Teaching Points):

1 त्रिकोणाची एकरूपता (Congruence of triangle)

2. त्रिकोणाच्या एकरूपतेची कसोटी (Criteria of congruence of triangle)

3. समद्विभुज त्रिकोण आणि समभुज त्रिकोणाचे काही गुणधर्म.

सोपे (EASY)	सरासरी (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
18	21	5	44

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1. यापैकी एकरूप आकृत्या (Congruent figures) कोणत्या आहेत? (सोपे)

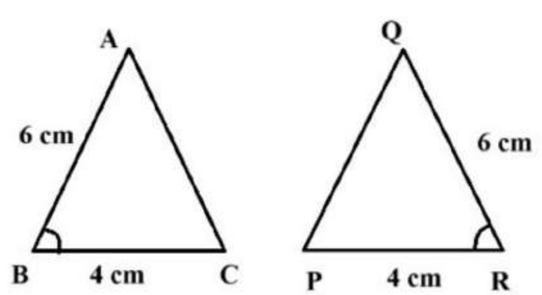
(A) चौरस आणि समलंब चौकोन (Square and trapezium)

(B) आयत आणि वर्तुळ (Rectangle and circle)

(C) समान त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे (Two circles of same radii)

(D) विषमभुज आणि समभुज त्रिकोण (Scalene and Equilateral triangles)

2.त्रिकोणांचे निरीक्षण करा, खालीलपैकी योग्य विधान कोणते आहे? (सोपे)



(A) △ABC≅△QPR

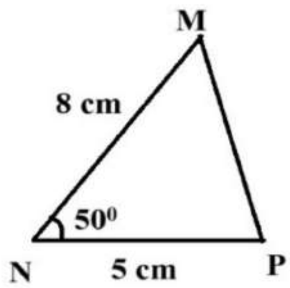
(B) △ABC≅△PQR

(C) △ACB≅△QRP

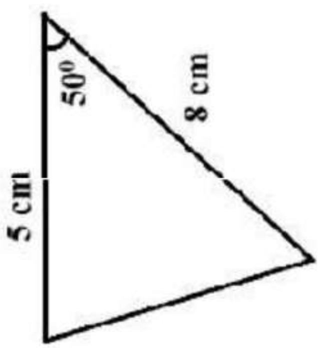
(D) △ABC≅△QRP

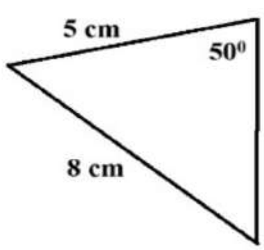
(टीप: या प्रश्नासाठी त्रिकोणांची आकृती आवश्यक आहे.)

3. दिलेल्या △MNP शी एकरूप असलेला त्रिकोण कोणता आहे? (सोपे)

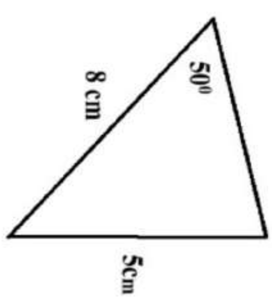


(A)

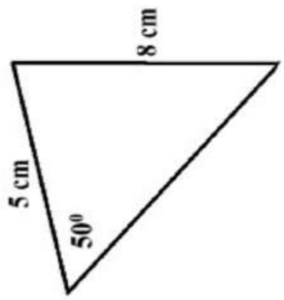




(B) (आकृती B)



(C) (आकृती C)



(D) (आकृती D)

(टीप: या प्रश्नासाठी △MNP आणि पर्यायांमधील त्रिकोणांच्या आकृत्या आवश्यक आहेत.)

4. जर ΔKLM≅ΔXYZ आणि ∠L=70°,∠M=50° असेल, तर ∠X चे माप किती? (सरासरी)

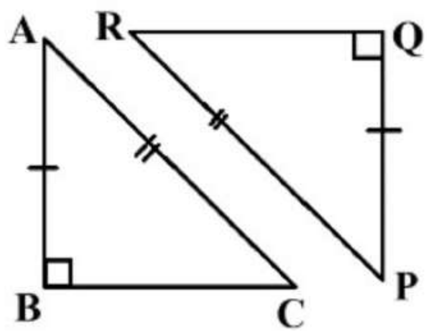
(A) 50°

(B) 60°

(C) 70°

(D) 120°

5. ΔABC आणि ΔDEF ची एकरूपता सिद्ध करण्यासाठी वापरलेला नियम कोणता आहे? (सोपे)



(A) S.S.S (बाजू-बाजू-बाजू)

(B) S.A.S (बाजू-कोन-बाजू)

(C) A.S.A (कोन-बाजू-कोन)

(D) R.H.S (काटकोन-कर्ण-बाजू)

(टीप: या प्रश्नासाठी त्रिकोणांची आकृती किंवा त्यांची दिलेली माहिती आवश्यक आहे.)

6. जर ΔDEF≅ΔKLM असेल, तर संबंधित बाजू कोणत्या आहेत? (सरासरी)

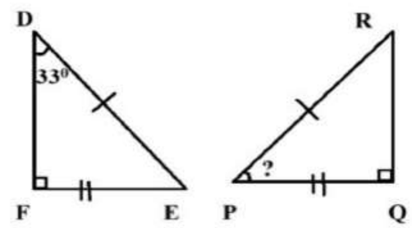
(A) DE आणि LM

(B) EF आणि KL

(C) EF आणि KM

(D) DF आणि MK

7. दिलेल्या त्रिकोणांमध्ये ∠P चे माप किती आहे? (सरासरी)



(A) 57°

(B) 67°

(C) 33°

(D) 90°

(टीप: या प्रश्नासाठी त्रिकोणांची आकृती आवश्यक आहे.)

८. एका समद्विभुज ΔBDE मध्ये, ∠B=∠E असेल, तर काय सत्य आहे? (सोपे)

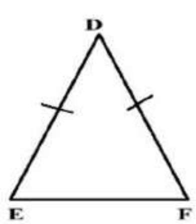
(A) BD=BE

(B) DE=BE

(C) BD=DE

(D) DB=EB

9.. दिलेल्या ΔDEF मध्ये, ∠D=45° असेल, तर ∠E चे माप किती आहे? (सरासरी)



(A) 67.5°

(B) 57.5°

(C) 135°

(D) 45°

(टीप: हा प्रश्न अपूर्ण वाटतो, कारण ∠E चे माप काढण्यासाठी ΔDEF बद्दल अधिक माहिती (उदा. समद्विभुज) किंवा आणखी एका कोनाचे माप आवश्यक आहे.)

10. समभुज त्रिकोणातील प्रत्येक कोनाचे माप किती असते? (सोपे)

(A) 180°

(B) 90°

(C) 60°

(D) 30°

11. ΔDEF आणि ΔXYZ मध्ये, DE=XY, EF=YZ, DF=XZ, ∠Z=35° आणि ∠X=53° असेल, तर ∠E चे माप किती आहे? (सरासरी)

(A) 88°

(B) 92°

(C) 127°

(D) 145°

12. जर समद्विभुज त्रिकोणातील समान कोनांचे माप प्रत्येकी 50° असेल, तर त्याच्या तिसऱ्या कोनाचे माप किती आहे? (सरासरी)

(A) 25°

(B) 40°

(C) 50°

(D) 80°

13. दोन त्रिकोणांमध्ये OF=AE, OX=PE आणि XF=AP असेल, तर त्रिकोणांमधील योग्य संबंध कोणता? (सरासरी)

(A) $\Delta FOX \cong \Delta APE$

(B) $\Delta XOF \cong \Delta APE$

(C) $\Delta FOX \cong \Delta AEP$

(D) $\Delta OXF \cong \Delta PEA$

14. असे दिले आहे की $\Delta CAT \cong \Delta DOG$ आणि AT=5 सेमी, $\angle A=80°$, $\angle T=60°$ असेल, तरः (सरासरी)

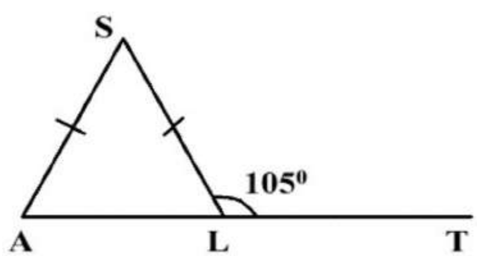
(A) DO=5 सेमी, $\angle D=60°$

(B) OG=5 सेमी, $\angle G=80°$

(C) DG=5 सेमी, $\angle G=40°$

(D) GO=5 सेमी, $\angle D=40°$

१५. दिलेल्या आकृती SALT मध्ये, $\angle SLT=105°$ असेल, तर $\angle ASL$ चे माप किती? (सरासरी)



(A) 30°

(B) 75°

(C) 85°

(D) 105°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

16. ΔABC आणि ΔQPR मध्ये, ∠B=∠P, आणि BC=PR असेल, तर S.A.S. एकरूपता निकषाने हे दोन त्रिकोण एकरूप होतील जर: (सोपे)

(A) AB=PR

(B) BC=AB

(C) AC=QR

(D) AB=QP

II. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

17. एकरूप त्रिकोणांची (congruent triangles) व्याख्या लिहा. (सोपे)

18. नेहमी एकरूप असणाऱ्या भूमितीय आकृत्यांचे एक उदाहरण द्या. (सोपे)

19. A.S.A. (कोन-बाजू-कोन) एकरूपता नियमाचे विधान लिहा. (सोपे)

20.. R.H.S. (काटकोन-कर्ण-बाजू) एकरूपता नियमाचे विधान लिहा. (सोपे)

21.S.S.S. (बाजू-बाजू-बाजू) एकरूपता नियमाचे विधान लिहा. (सोपे)

22. S.A.S. (बाजू-कोन-बाजू) एकरूपता नियमाचे विधान लिहा. (सोपे)

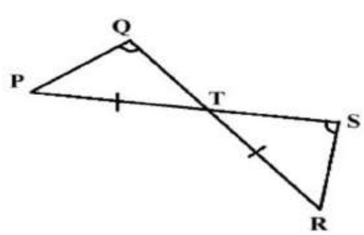
23. जर ΔPQR≅ΔXYZ असेल, तर संबंधित शिरोबिंदू (corresponding vertices) लिहा. (सोपे)

24. जर ΔKLM≅ΔGHK असेल, तर संबंधित बाजू (corresponding sides) लिहा. (सोपे)

25.. एका समद्विभुज ΔABC मध्ये, ∠A=∠C असेल. समान बाजूंची नावे लिहा. (सोपे)

III. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

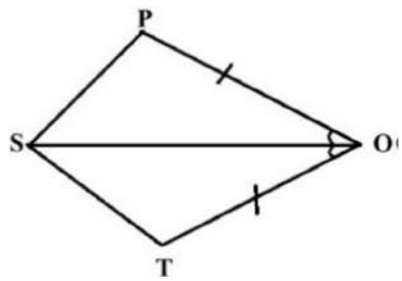
26. दिलेल्या आकृतीमध्ये PS आणि QR, T बिंदूत छेदतात, ∠Q=∠S. सिद्ध करा की ΔPQT≅ΔRST. (सरासरी)



27. सिद्ध करा की समभुज त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन 60° असतो. (सरासरी)

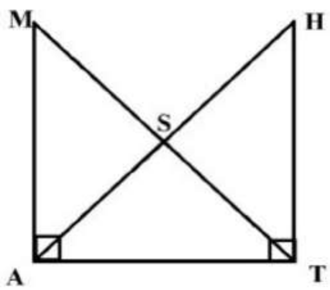
III. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

२८. लगतच्या चौकोन STOP मध्ये, SO हा ∠O चा दुभाजक आहे, SP=5 सेमी. ST ची लांबी शोधा आणि तुमच्या उत्तराचे कारण द्या. (सरासरी)

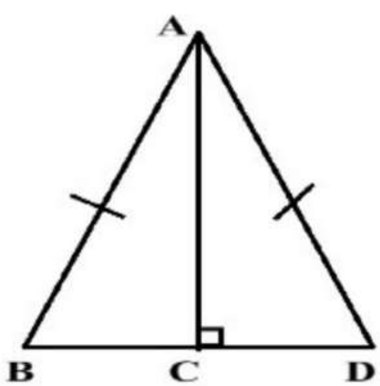


29. CAR हा काटकोन त्रिकोण आहे, R येथे काटकोन आहे. लघुकोन 2:3 या प्रमाणात आहेत. लघुकोनांची मापे शोधा. (सरासरी)

30. दिलेल्या आकृती MATHS मध्ये, AH=MT. सिद्ध करा की AM=HT. (सरासरी)

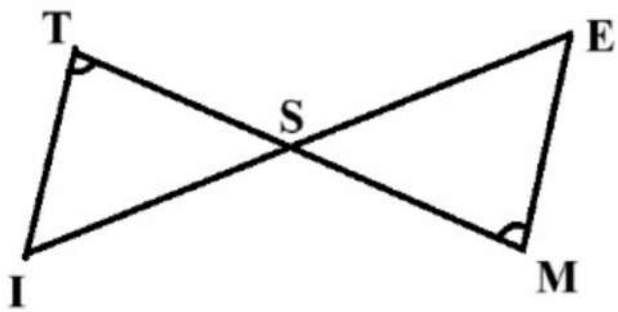


31. △ABD मध्ये, AC⊥BD, RHS (काटकोन-कर्ण-बाजू) एकरूपता नियमाचा वापर करून सिद्ध करा की ∠B=∠D. (सरासरी)

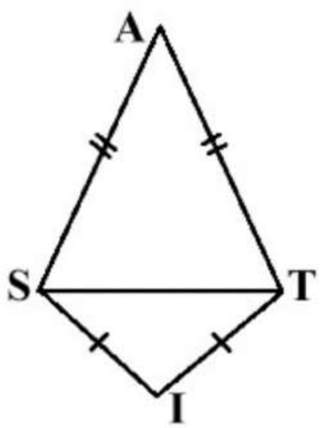


32. एका समद्विभुज काटकोन त्रिकोणामध्ये, सर्व तीन कोनांची मापे शोधा. (सोपे)

33. आकृतीचे निरीक्षण करा, रेषाखंड TM आणि EI, S बिंदूत छेदतात. S हा TM चा मध्यबिंदू आहे आणि ∠T=∠M. सिद्ध करा की △SIT≅△SEM. (सरासरी)



34. △SAT आणि △SIT हे समद्विभुज त्रिकोण समान पाया ST वर आहेत. सिद्ध करा की ∠ASI=∠ATI. (सरासरी)



Here are the Marathi translations for the remaining questions from Chapter 7, "Triangles."

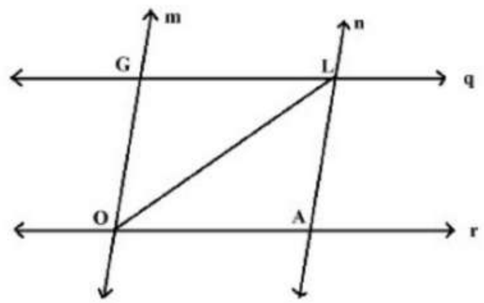
IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

35. सिद्ध करा की "आयताचा प्रत्येक कर्ण त्याला दोन एकरूप त्रिकोणांमध्ये विभाजित करतो." (सरासरी)

36. दिलेल्या आकृतीमध्ये, m||n आणि q||r. सिद्ध करा की: (सरासरी)

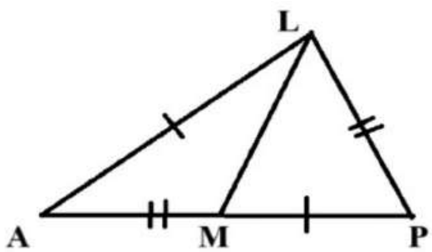
i) △OGL≅△OAL

ii) ∠G=∠A



37. AB हा एक रेषाखंड आहे आणि रेषा l ही त्याचा लंब दुभाजक (perpendicular bisector) आहे. जर P हा बिंदू रेषा l वर असेल, तर सिद्ध करा की P हा A आणि B पासून समान अंतरावर आहे. (सरासरी)

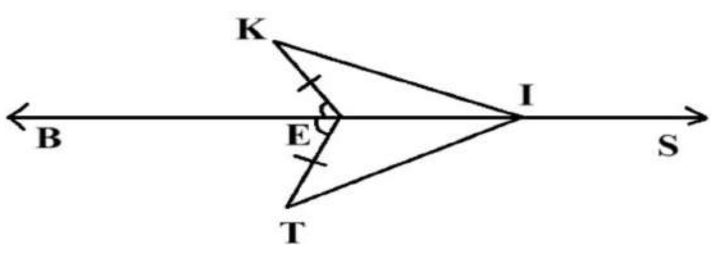
38. दिलेल्या आकृती LAMP मध्ये, AL=MP, AM=LP. सिद्ध करा की ∠ALM=∠LMP. (सोपे)



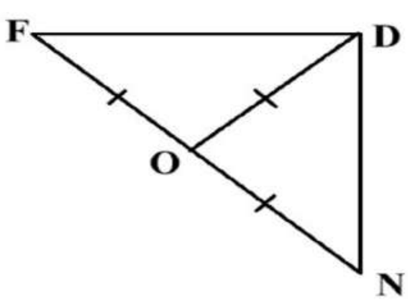
39. दिलेल्या चौकोन KITE मध्ये, BS हा ∠KET चा दुभाजक आहे आणि KE=ET. सिद्ध करा की: (कठीण)

i) △KEI≅△TEI.

ii) KI=TI.



40.. दिलेल्या △FND मध्ये. FO=ON=OD. सिद्ध करा की ∠FDN=90°. (कठीण)



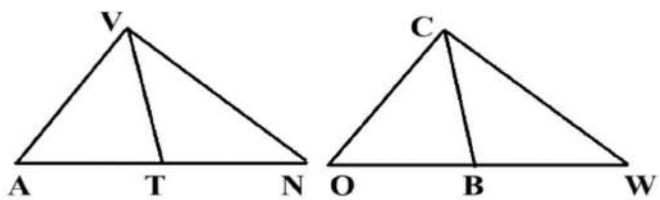
V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

41. दिलेल्या आकृतीमध्ये, △VAN≅△COW, VT आणि CB या त्यांच्या मध्यगा (medians) आहेत. (कठीण)

सिद्ध करा की:

i) △VAT≅△COB

ii) VT=CB

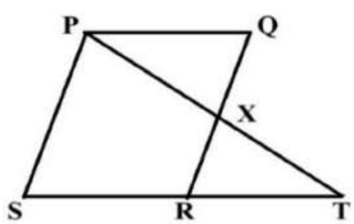


42.. PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे ज्यात X हा QR चा मध्यबिंदू आहे. (कठीण)

सिद्ध करा की:

i) △PXQ≅△TXR

ii) ST=2PQ



VI. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (पाच गुणांचे प्रश्न)

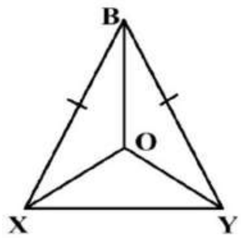
43. दिलेल्या आकृतीमध्ये, △BXY हा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे, ∠X आणि ∠Y चे दुभाजक O बिंदूत छेदतात. (सरासरी)

सिद्ध करा की:

i) OX=OY

ii) △BOX≅△BOY

iii) OB हा ∠XBY चा दुभाजक आहे.



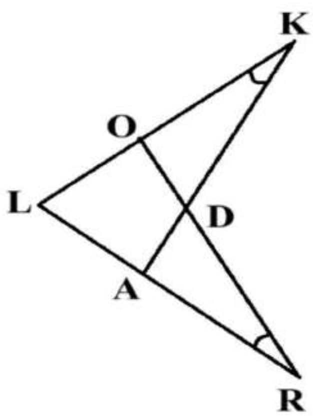
44. आकृती KOLARD मध्ये, ∠AKL=∠ORL आणि KL=RL. (सरासरी)

सिद्ध करा की:

i) △KAL≅△ROL

ii) AK=OR

iii) AR=OK

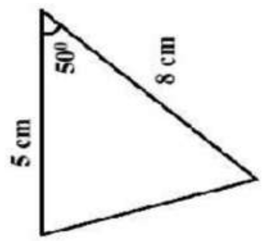


प्रकरण (CHAPTER 7 **Triangles**) उत्तरे

I. बहुपर्यायी प्रश्न

1. (C) समान त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे

2. (D) ΔABC≅ΔQRP

3.. (A) 

4. (B) 60

5. (D) R.H.S (काटकोन-कर्ण-बाजू)

6. (D) DF आणि MK

7. (A) 57°

8. (C) BD=DE

9. (A) 67.5°

10. (C) 60°

11. (B) 92°

12. (D) 80°

13. (C) ΔFOX≅ΔAEP

14. (D) GO=5 सेमी, ∠D=40°

15. (A) 30°

16. (D) AB=QP

II. एक गुणांचे प्रश्न

17. **दोन त्रिकोण एकरूप (congruent) आहेत असे तेव्हा म्हटले जाते, जेव्हा त्यांच्या संगत बाजू आणि संगत कोन समान असतात.**

18. **समान त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे, समान बाजू असलेले समभुज त्रिकोण, समान बाजू असलेले चौरस इत्यादी.** (हे भूमितीय आकृत्यांची उदाहरणे आहेत जी नेहमी एकरूप असतात.)

19. **दोन त्रिकोण एकरूप असतात, जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजू (included side) दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोन आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजूशी समान असतील.** (हे A.S.A. एकरूपता नियमाचे विधान आहे.)

20. **जर दोन काटकोन त्रिकोणांमध्ये, एका त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कर्ण आणि एका बाजूशी समान असेल, तर ते दोन्ही त्रिकोण एकरूप असतात.** (हे R.H.S. एकरूपता नियमाचे विधान आहे.)

II. एक गुणांचे प्रश्न

21. **जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूंशी समान असतील, तर ते दोन्ही त्रिकोण एकरूप असतात.** (हे S.S.S. एकरूपता नियमाचे विधान आहे.)

22. **दोन त्रिकोण एकरूप असतात, जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट कोन (included angle) दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट कोनाशी समान असतील.** (हे S.A.S. एकरूपता नियमाचे विधान आहे.)

23. **संगत शिरोबिंदू हे $P \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Y$ आणि $R \leftrightarrow Z$ आहेत.**

24. **संगत बाजू KL = GH, LM = HK आणि KM = GK आहेत.**

25. **AB=BC** (समद्विभुज त्रिकोणात, समान कोनांसमोरील बाजू समान असतात. येथे $\angle A=\angle C$ असल्याने, त्यांच्यासमोरील बाजू समान असतील.)

III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

26. दिलेल्या आकृतीत PS आणि QR हे T बिंदूत छेदतात आणि $\angle Q=\angle S$.

सिद्ध करायचे आहे: $\Delta PQT \cong \Delta RST$.

सिद्धता: ΔPQT आणि ΔRST मध्ये,

$\angle Q=\angle S$ (दिलेले).

∠PTQ=∠RTS (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles).

PT=TR (दिलेले).

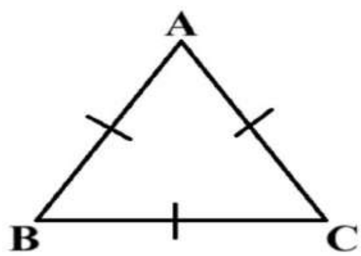
∴ΔPQT≅ΔRST (A.A.S. एकरूपता नियम / A.A.S. Congruence Rule).

---

27. ΔABC हा एक समभुज त्रिकोण आहे.

सिद्ध करायचे आहे: ∠A=∠B=∠C.

सिद्धता: ΔABC मध्ये,



AB=AC

∴∠B=∠C (समान बाजूंचे समोरील कोन) ---------- (१)

AB=BC

∴∠A=∠C (समान बाजूंचे समोरील कोन) ---------- (२)

(१) आणि (२) वरून,

∴∠A=∠B=∠C (अभिगृहीत १ / Axiom 1 नुसार).

(∠A=∠B=∠C=६०°)

III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

28.

दिलेले आहे: आकृतीमध्ये, ∠SOP=∠SOT, OP=OT, SP=5 सेमी. ST=?

△SOP आणि △SOT मध्ये,

OP=OT (दिलेले)

∠SOP=∠SOT (दिलेले)

SO=SO (सामायिक बाजू / Common side)

△SOP≅△SOT (बाजू-कोन-बाजू एकरूपता नियम / S.A.S. Congruence rule)

ST=SP (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू / C.P.C.T - Corresponding Parts of Congruent Triangles)

∴ST=5 सेमी.

29.

दिलेले आहे: CAR हा काटकोन त्रिकोण आहे, ∠R=90°. ∠C:∠A=2:3. ∠C=?, ∠A=?

उत्तर:

∠C+∠A+∠R=180° (त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज)

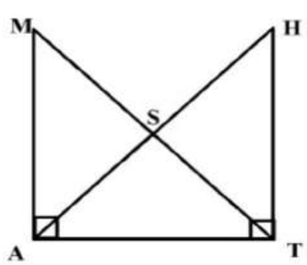
∠C+∠A=90° (∠R=90° असल्याने)

∠C=52×90°=36°

∠A=53×90°=54°

30.

दिलेले आहे: आकृती MATHS मध्ये, AH=MT.



सिद्ध करायचे आहे: AM=HT

सिद्धता: △MAT आणि △HTA मध्ये,

∠A=∠T=90° (दिलेले)

AH=MT (दिलेले)

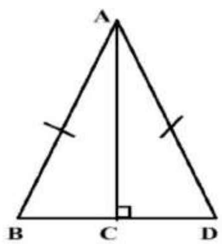
AT=AT (सामायिक बाजू / Common side)

△MAT≅△HTA (काटकोन-कर्ण-बाजू एकरूपता नियम / R.H.S. Congruence rule)

∴AM=HT (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू / C.P.C.T.)

31.

दिलेले आहे: △ABD मध्ये, AC⊥BD.



सिद्ध करायचे आहे: ∠B=∠D

सिद्धता: △ACB आणि △ACD मध्ये,

∠ACB=∠ACD=90° (दिलेले)

Here are the Marathi translations for the remaining solutions to the questions from Chapter 7, "Triangles."

III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

32.

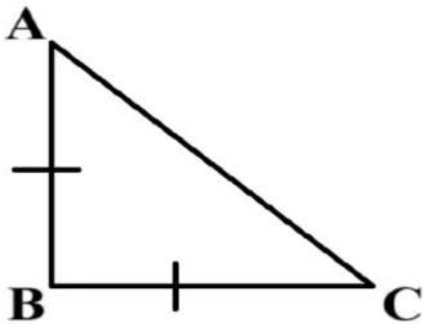
AB=AD (दिलेले)

AC=AC (सामायिक बाजू)

△ACB≅△ACD (काटकोन-कर्ण-बाजू एकरूपता नियम / R.H.S. Congruence rule)

∠B=∠D (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

32. △ABC मध्ये, AB=BC, ∠B=९०°. ∠A=?, ∠C=?



उत्तर: △ABC मध्ये,

AB=BC (दिलेले)

∠A=∠C=x (समान बाजूंचे समोरील कोन)

∠A+∠B+∠C=१८०° (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म / Angle sum property of triangle)

x+९०°+x=१८०°

२x=१८०°−९०°

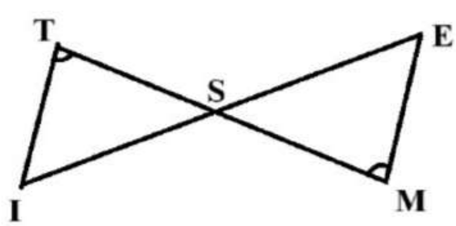
२x=९०°

x=४५°

म्हणून, इतर दोन कोनांचे माप प्रत्येकी ४५° आहे.

---

33. TS=MS आणि ∠T=∠M.



सिद्ध करायचे आहे: △SIT≅△SEM.

सिद्धता: △SIT आणि △SEM मध्ये,

∠T=∠M (दिलेले)

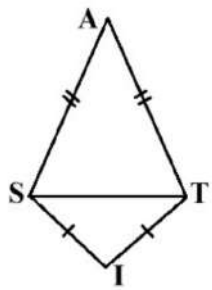
TS=MS (दिलेले)

$\angle TSI=\angle MSE$ (विरुद्ध कोन / V.O.A)

$\therefore \triangle SIT \cong \triangle SEM$ (कोन-बाजू-कोन एकरूपता नियम / A.S.A. Congruence rule)

---

34. $\triangle SAT$ आणि $\triangle SIT$ हे समान पाया ST वर असलेले समद्विभुज त्रिकोण आहेत.



सिद्ध करायचे आहे: $\angle ASI=\angle ATI$.

सिद्धता: $\triangle SAT$ मध्ये,

AS=AT (दिलेले - समद्विभुज त्रिकोण)

$\angle AST=\angle ATS$ (समान बाजूंचे समोरील कोन) → (१)

$\triangle SIT$ मध्ये,

SI=TI (दिलेले - समद्विभुज त्रिकोण)

$\angle SIT=\angle STI$ (समान बाजूंचे समोरील कोन) → (२)

(टीप: येथे सिद्धता अपूर्ण आहे. पुढचा भाग दिलेला नाही. $\angle AST+\angle IST=\angle ASI$ आणि $\angle ATS+\angle ITS=\angle ATI$ हे वापरून सिद्धता पूर्ण करावी लागेल.)

III. लघुत्तरी प्रश्न: (दोन गुणांचे प्रश्न)

34. (चालू)

$\angle IST=\angle ITS$ (समान बाजूंचे समोरील कोन) → (२)

(१) आणि (२) यांची बेरीज केल्यास,

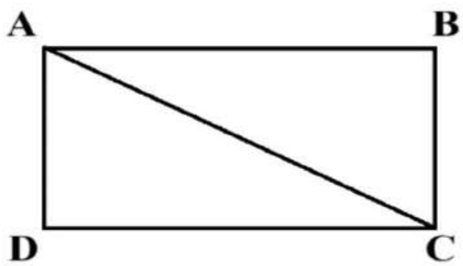
$\angle AST + \angle IST = \angle ATS + \angle ITS$

$\angle ASI = \angle ATI$

IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

35.

दिलेले आहे: ABCD आयतामध्ये, AC हा कर्ण आहे.



सिद्ध करायचे आहे: $\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

सिद्धता: $\triangle ADC$ आणि $\triangle CBA$ मध्ये,

AD=BC (आयताच्या समोरील बाजू)

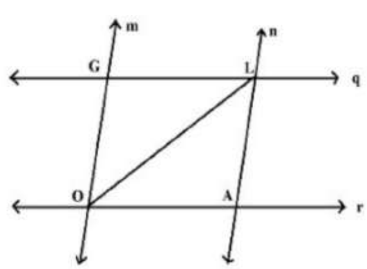
DC=AB (आयताच्या समोरील बाजू)

AC=AC (सामायिक बाजू)

$\triangle ADC \cong \triangle CBA$ (बाजू-बाजू-बाजू एकरूपता नियम / S.S.S. Congruence rule)

36.

दिलेले आहे: आकृतीमध्ये, m||n आणि q||r.



i) GOAL हा समांतरभुज चौकोन आहे (समोरील बाजूंच्या दोन जोड्या समांतर आहेत).

$\triangle OGL$ आणि $\triangle OAL$ मध्ये,

$GL=OA$ (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू)

$OG=LA$ (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू)

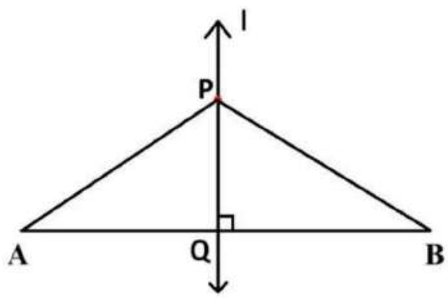
$OL=OL$ (सामायिक बाजू)

$\triangle OGL\cong\triangle OAL$ (बाजू-बाजू-बाजू एकरूपता नियम / S.S.S. Congruence rule)

ii) $\angle G=\angle A$ (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T.)

37.

दिलेले आहे: आकृतीमध्ये, $AQ=BQ$, $\angle Q=90°$.



सिद्ध करायचे आहे: $AP=BP$.

सिद्धता: $\triangle AQP$ आणि $\triangle BQP$ मध्ये,

$AQ=BQ$ (दिलेले)

$\angle AQP=\angle BQP$ (दिलेले)

$PQ=PQ$ (सामायिक बाजू)

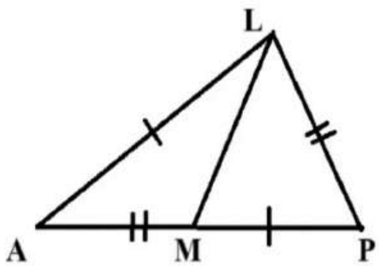
$\triangle AQP\cong\triangle BQP$ (बाजू-कोन-बाजू एकरूपता नियम / S.A.S. Congruence rule)

$\therefore AP=BP$ (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T.)

IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

38.

दिलेले आहे: आकृती LAMP मध्ये, AL=MP, AM=LP.



सिद्ध करायचे आहे: ∠ALM=∠LMP.

सिद्धता: △AML आणि △PML मध्ये,

AL=MP (दिलेले)

AM=LP (दिलेले)

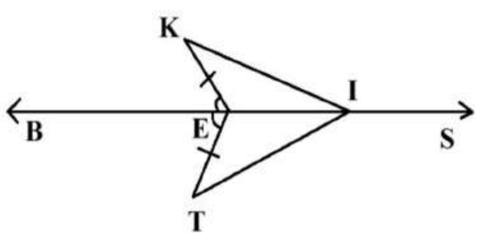
LM=LM (सामायिक बाजू)

△AML≅△PML (बाजू-बाजू-बाजू एकरूपता नियम / S.S.S. Congruence rule)

∴∠ALM=∠LMP (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T.)

39.

दिलेले आहे: चौकोन KITE मध्ये, ∠BEK=∠BET आणि KE=ET.



सिद्ध करायचे आहे: i) △KEI≅△TEI.

ii) KI=TI.

सिद्धता:

$\angle KEI = 180° - \angle BEK \rightarrow (1)$ (रेषीय जोडीतील कोन / L.P.A - Linear Pair Angles)

$\angle TEI = 180° - \angle BET$ (रेषीय जोडीतील कोन / L.P.A)

$\angle TEI = 180° - \angle BEK \rightarrow (2)$ ($\angle BEK = \angle BET$ असल्याने)

$\therefore \angle KEI = \angle TEI$ (अभिगृहीत १ / Axiom.1)

$\triangle KEI$ आणि $\triangle TEI$ मध्ये,

$KE = ET$ (दिलेले)

$\angle KEI = \angle TEI$ (सिद्ध केले)

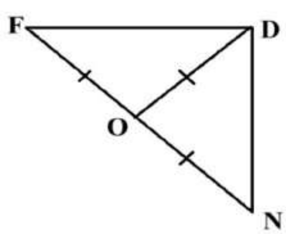
$EI = EI$ (सामायिक बाजू)

$\therefore \triangle KEI \cong \triangle TEI$ (बाजू-कोन-बाजू एकरूपता नियम / S.A.S. Congruence rule)

$\therefore KI = TI$ (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T.)

40.

दिलेले आहे: $\triangle FND$ मध्ये, $FO = ON = OD$.



सिद्ध करायचे आहे: $\angle FDN = 90°$.

सिद्धता: $\triangle FOD$ मध्ये,

$FO = OD$ (दिलेले)

$\therefore \angle OFD = \angle ODF = x$ (समान बाजूंचे समोरील कोन)

$\triangle NOD$ मध्ये,

ON=OD (दिलेले)

∴∠OND=∠ODN=y (समान बाजूंचे समोरील कोन)

△FDN मध्ये,

∠F+∠D+∠N=१८०° (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

∠F+∠ODF+∠ODN+∠N (अपूर्ण समीकरण)

x+x+y+y=१८०°

२x+२y=१८०°

२(x+y)=१८०°

x+y=९०°

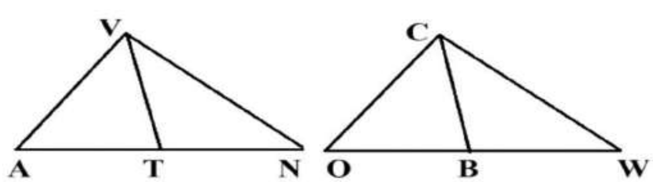
∴∠FDN=९०°

V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

41.

दिलेले आहे: △VAN≅△COW, VT आणि CB या त्यांच्या मध्यगा (medians) आहेत.

सिद्ध करायचे आहे:



i) △VAT≅△COB

ii) VT=CB

सिद्धता: △VAT आणि △COB मध्ये,

VA=CO (△VAN≅△COW असल्याने, एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग)

AN=OW (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग)

मध्यगा असल्याने, T हा AN चा मध्यबिंदू आहे आणि B हा OW चा मध्यबिंदू आहे.

२१AN=२१OW

AT=OB (T आणि B हे मध्यबिंदू असल्याने)

VT=CB (मध्यगा एकरूप आहेत असे गृहीत धरले आहे किंवा सिद्ध करायचे आहे)

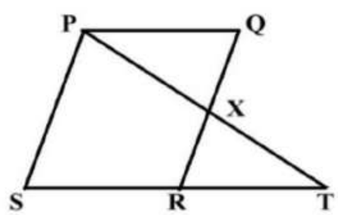
△VAT≅△COB (बाजू-बाजू-बाजू (SSS) किंवा कोन-बाजू-कोन (ASA) कसोटी आवश्यक आहे. फक्त बाजूंची माहिती अपुरी आहे. अधिक कोनांची माहिती किंवा बाजू-कोन-बाजू जुळवण्या आवश्यक आहेत. VT=CB हे सिद्ध करायचे असल्याने, त्याचा वापर थेट करता येणार नाही.)

(टीप: दिलेल्या सिद्धतेमध्ये 'VT = VT' हे चुकीचे विधान आहे, ते 'VT = CB' सिद्ध करायचे आहे. तसेच, △VAT आणि △COB एकरूप करण्यासाठी VA=CO, AT=OB आणि ∠VAT=∠COB (एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन) आवश्यक आहे, त्यानंतर SAS एकरूपता लागू होईल. किंवा ∠VTA=∠COB (एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन) आणि ∠AVT=∠OCB असेल तर AAS लागू होईल. दिलेल्या माहितीनुसार, △VAN≅△COW असल्याने ∠A=∠O हा कोन वापरला जाऊ शकतो, ज्यामुळे VA=CO, ∠A=∠O, AT=OB यानुसार SAS कसोटीने △VAT≅△COB सिद्ध होईल.)

42.

दिलेले आहे: PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे, X हा QR चा मध्यबिंदू आहे.

सिद्ध करायचे आहे:



i) △PXQ≅△TXR

ii) ST=2PQ

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

42. (चालू)

सिद्धता: △PXQ आणि △TXR मध्ये,

∠PQX=∠XRT (व्युत्क्रम कोन, PQ||SR असल्यामुळे / Alternate angles, PQ||SR)

QX=RX (दिलेले)

∠PXQ=∠RXT (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles)

△PXQ≅△TXR (कोन-बाजू-कोन एकरूपता नियम / A.S.A. Congruence rule)

PQ=RT (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T)

PQ=SR (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू / Opposite sides of a parallelogram)

ST=SR+RT (दिलेल्या आकृतीनुसार)

ST=PQ+PQ

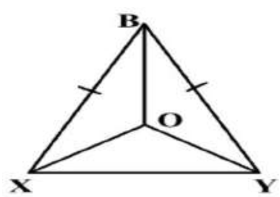
ST=2PQ

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

43.

दिलेले आहे: △BXY हा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे, BX=BY आणि ∠OXY=∠OYX.

सिद्ध करायचे आहे:



i) OX=OY

ii) △BOX≅△BOY

iii) ∠XBO=∠YBO

सिद्धता:

i) ∠OXY=∠OYX (दिलेले)

याचा अर्थ △OXY मध्ये समान कोनांसमोरील बाजू समान आहेत.

∴OX=OY (समान कोनांसमोरील बाजू / Opposite sides of equal angles)

ii) △BOX आणि △BOY मध्ये,

BX=BY (दिलेले)

OX=OY (i) मधून सिद्ध केले)

OB=OB (सामायिक बाजू / Common side)

∴△BOX≅△BOY (बाजू-बाजू-बाजू एकरूपता नियम / S.S.S. Congruence rule)

iii) △BOX≅△BOY असल्याने,

∠XBO=∠YBO (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T)

यावरून असे सिद्ध होते की OB हा ∠XBY चा दुभाजक आहे.

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Mark Questions)

44. दिलेले आहे: आकृती KOLARD मध्ये, ∠AKL=∠ORL आणि KL=RL.

सिद्ध करायचे आहे:

i) △KAL≅△ROL

ii) AK=OR

iii) AR=OK

सिद्धता:

i) △AKL आणि △ORL मध्ये,

∠AKL=∠ORL (दिलेले)

KL=RL (दिलेले)

∠KLA=∠RLO (विरुद्ध कोन / Vertically Opposite Angles)

टीप: तुमच्या दिलेल्या उत्तरामध्ये ∠KLR=∠KLR असे दिले आहे, जे चुकीचे आहे. येथे ∠KLA आणि ∠RLO हे विरुद्ध कोन आहेत. जर L हा बिंदू KA आणि OR यांना छेदिका मानून तयार झालेल्या कोनांशी संबंधित असेल, तर ∠KLA आणि ∠RLO हे विरुद्ध कोन म्हणून समान असतील. किंवा, जर आकृतीमध्ये L हा छेदबिंदू नसेल, तर दिलेल्या माहितीनुसार A.S.A. वापरणे शक्य नाही. तथापि,

सामान्यतः अशा समस्यांमध्ये L हा छेदनबिंदू मानला जातो आणि कोन ∠KLA व ∠RLO हे विरुद्ध कोन असतात.

म्हणून, △KAL≅△ROL (कोन-बाजू-कोन एकरूपता नियम / A.S.A. Congruence rule)

ii) AK=OR (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T)

iii) KL=LR (दिलेले)

∠KLA=∠RLO (विरुद्ध कोन)

AL=OL (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / C.P.C.T)

येथे, 'KL - LO = LR - AL' हे विधान थोडे गोंधळात टाकणारे आहे कारण हे लांबीच्या वजाबाकीचे समीकरण आहे आणि हे 'OK = AR' सिद्ध करण्यासाठी थेट लागू होत नाही, जोपर्यंत आकृतीचे विशिष्ट स्वरूप स्पष्ट होत नाही.

सुधारित सिद्धता (iii साठी, सामान्य गृहितकांसह):

जर △KAL≅△ROL असेल, तर C.P.C.T. नुसार AK=OR आणि AL=OL.

जर बिंदू K, L, R आणि A, O, R हे एका रेषेत असतील तरच (किंवा समान रेषाखंडावर) आपण रेषाखंडांची बेरीज किंवा वजाबाकी वापरू शकतो.

जर KOLARD ही आकृती एक विशिष्ट चौकोन असेल आणि 'L' हा AC आणि KO चा छेदनबिंदू असेल (तर्क लावून), तर:

AR=AL+LR (जर A-L-R एका रेषेत असतील)

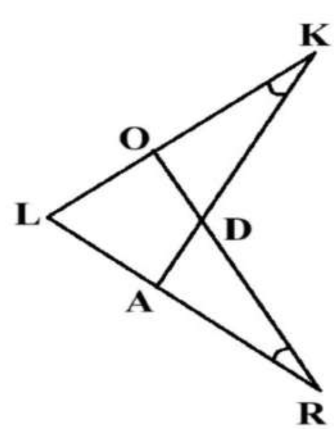
OK=OL+LK (जर O-L-K एका रेषेत असतील)

परंतु आपण AL=OL आणि KL=RL हे सिद्ध केले आहे.

त्यामुळे, AR=AL+LR

OK=AL+LR (कारण OL=AL आणि LK=LR)

∴AR=OK



प्रकरण 8 – चौकोन (CHAPTER 8 – QUADRILATERALS)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning outcome):

चौकोनांशी संबंधित गणिताच्या विधानांची सिद्धता करणे आणि त्यांचा वापर करून समस्या सोडवणे.

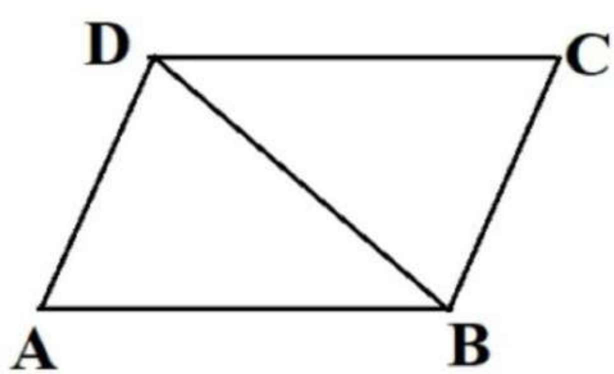
अध्ययन अंश (Teaching Points):

- समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म.
- मध्यबिंदू प्रमेय.

सोपे (EASY)	सरासरी (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
16	44	6	64

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा.

1. आकृतीमध्ये, समांतरभुज चौकोन ABCD चा कर्ण कोणता आहे? (सोपे)



(A) AB

(B) DC

(C) DB

(D) AD

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

2. समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व कोनांची बेरीज किती असते? (सोपे)

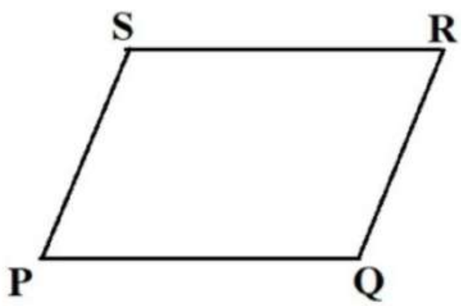
(A) 90°

(B) 180°

(C) 270°

(D) 360°

3. आकृतीमध्ये, जर PQRS हा समांतरभुज चौकोन असेल, तर ∠P= किती? (सोपे)



(A) ∠R

(B) ½∠R

(C) 2∠R

(D) 3∠R

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

4. जर समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण समान असतील, तर तो कोणता चौकोन असतो? (सोपे)

(A) पतंग (Kite)

(B) आयत (Rectangle)

(C) समभुज चौकोन (Rhombus)

(D) समलंब चौकोन (Trapezium)

5. समांतरभुज चौकोनात, कोणत्याही दोन क्रमवार कोनांची बेरीज किती असते? (सोपे)

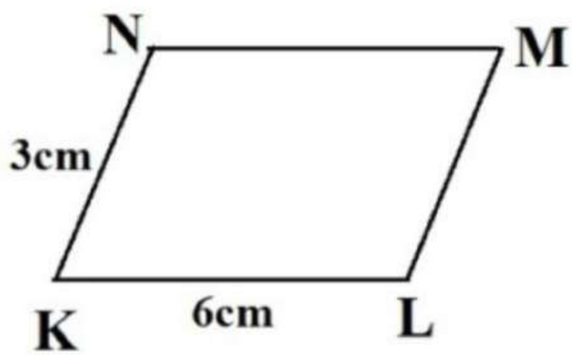
(A) 90°

(B) 100°

(C) 150°

(D) 180°

6. आकृतीमध्ये, KLMN हा समांतरभुज चौकोन आहे. जर KL = 6 सेमी आणि NK = 3 सेमी असेल, तर त्या समांतरभुज चौकोनाची परिमिती किती? (सरासरी)



(A) 9 सेमी

(B) 18 सेमी

(C) 24 सेमी

(D) 30 सेमी

7. समांतरभुज चौकोनात, जर चारही बाजू समान लांबीच्या असतील, तर तो कोणता चौकोन असतो? (सोपे)

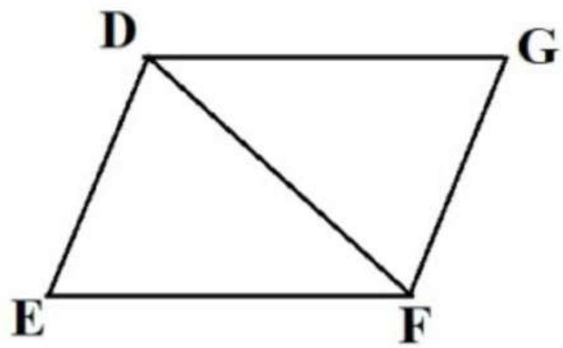
(A) समलंब चौकोन (Trapezium)

(B) पतंग (Kite)

(C) आयत (Rectangle)

(D) समभुज चौकोन (Rhombus)

8. आकृतीमध्ये, DEFG हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. खालीलपैकी योग्य विधान कोणते आहे? (सोपे)



(A) ∠E+∠D=90°

(B) ∠D∠F

(C) ∠EDF=∠DFG

(D) ∠E=2∠G

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

9. समांतरभुज चौकोनात, जर एका कोनाचे माप 90° असेल, तर तो कोणता चौकोन बनतो? (सोपे)

(A) आयत (Rectangle)

(B) समलंब चौकोन (Trapezium)

(C) समभुज चौकोन (Rhombus)

(D) पतंग (Kite)

10. समांतरभुज चौकोनासंदर्भात, खालीलपैकी योग्य विधान कोणते आहे? (सरासरी)

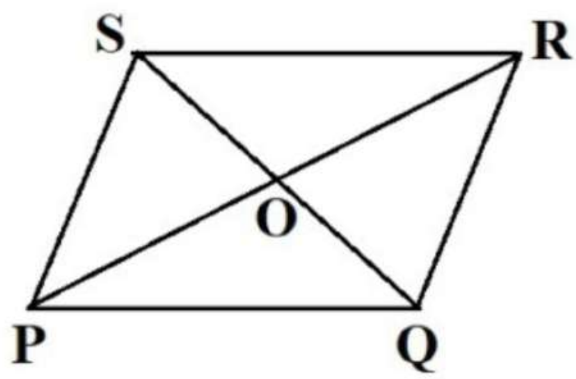
(A) समोरील बाजू समान असतात पण समांतर नसतात.

(B) समोरील कोन नेहमी संपूरक असतात.

(C) कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

(D) कर्ण असमान असतात आणि एकमेकांना दुभागतात नाहीत.

11. आकृतीमध्ये PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे. खालीलपैकी योग्य विधान कोणते आहे? (सोपे)



(A) PO = 2OR

(B) OQ = OS

(C) PR = QS

(D) PQ = 2 SR

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

12. जर समांतरभुज चौकोनाच्या एका कोनाचे माप 70° असेल, तर त्याच्या लगतच्या कोनाचे माप किती? (सरासरी)

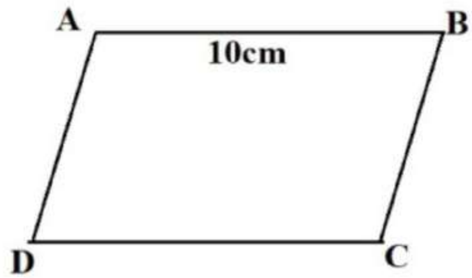
(A) 20°

(B) 70°

(C) 90°

(D) 110°

13. आकृतीमध्ये, ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर समांतरभुज चौकोनाची परिमिती 36 सेमी असेल आणि त्याची एक बाजू 10 सेमी असेल, तर BC ची लांबी किती? (सरासरी)



(A) 5 सेमी

(B) 8 सेमी

(C) 10 सेमी

(D) 26 सेमी

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

14. जर समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन त्याच्या लगतच्या कोनाच्या दोन तृतीयांश (2/3) असेल, तर त्याचा सर्वात लहान कोन किती आहे? (सरासरी)

(A) 54°

(B) 72°

(C) 81°

(D) 108°

१५. एका समांतरभुज चौकोनात, जर विरुद्ध कोनांची बेरीज 80° असेल, तर त्या प्रत्येक विरुद्ध कोनाचे माप किती? [सरासरी]

(A) 20°

(B) 40°

(C) 80°

(D) 100°

16. जर एका समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन त्याच्या सर्वात लहान कोनाच्या दुप्पटपेक्षा 24° कमी असेल, तर सर्वात मोठा कोन किती आहे? [सरासरी]

(A) 68°

(B) 102°

(C) 112°

(D) 136°

17. समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्याही दोन लगतच्या कोनांचे दुभाजक किती अंशाच्या कोनात छेदतात? [सरासरी]

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

18. समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये, जर ∠A=75° असेल, तर ∠D–∠C चे माप किती? [कठीण]

(A) 5°

(B) 20°

(C) 30°

(D) 60°

19. समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांचे दुभाजक कोणता चौकोन तयार करतात? [सरासरी]

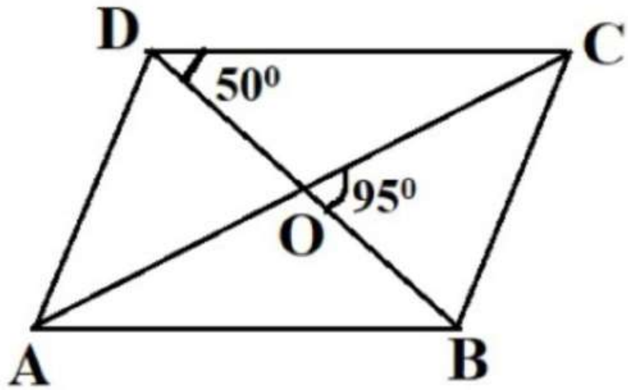
(A) समांतरभुज चौकोन

(B) समभुज चौकोन

(C) आयत

(D) चौरस

20. आकृतीमध्ये, ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. कर्ण AC आणि BD 'O' बिंदूत छेदतात. जर ∠CDO=50° आणि ∠COB=95⁰ असेल, तर ∠OAB चे माप किती? [कठीण]



(A) 30°

(B) 45°

(C) 50°

(D) 60°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे.)

21. एका समांतरभुज चौकोनात, जर लगतचे कोन 2:3 या प्रमाणात असतील, तर त्या लगतच्या कोनांची मापे किती आहेत? [सरासरी]

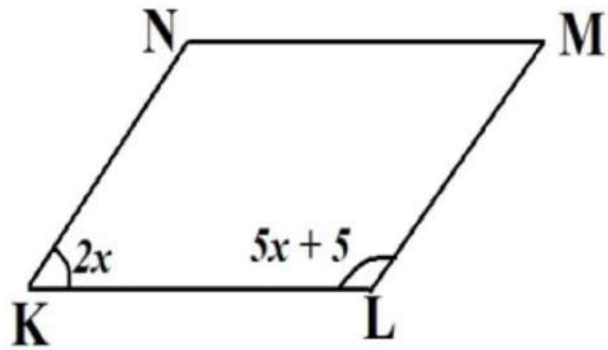
(A) 20° आणि 30°

(B) 36° आणि 54°

(C) 60° आणि 120°

(D) 72° आणि 108°

22. आकृतीमध्ये, KLMN हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर ∠K आणि ∠L अनुक्रमे (2x) आणि (5x+5) असतील, तर 'x' चे मूल्य किती आहे? [सरासरी]



(A) 25°

(B) 30°

(C) 50°

(D) 130°

23. ABCD हा एक समभुज चौकोन (rhombus) आहे, ज्यात ∠ACB=40° आहे, तर ∠ADB चे माप किती? [सरासरी]

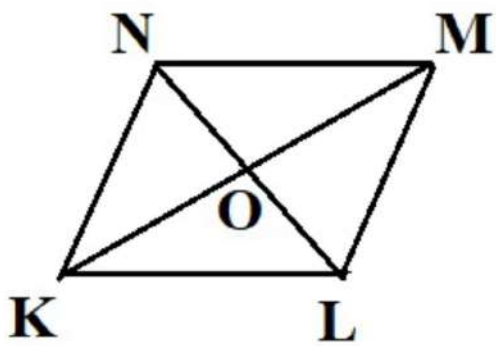
(A) 40°

(B) 45°

(C) 50°

(D) 60°

24. आकृतीमध्ये, जर KLMN हा समभुज चौकोन असेल, तर ∠MOL चे माप किती? [सरासरी]



(A) 45°

(B) 60°

(C) 80°

(D) 90°

25. 10 सेमी लांबीच्या बाजू असलेल्या समभुज चौकोनाची परिमिती किती? [सरासरी]

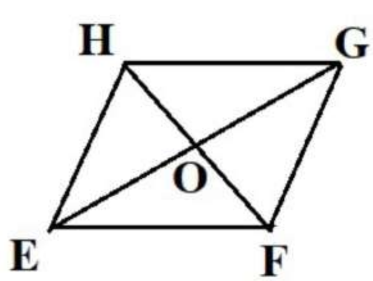
(A) 10 सेमी

(B) 14 सेमी

(C) 20 सेमी

(D) 40 सेमी

26. आकृतीमध्ये, EFGH हा समभुज चौकोन आहे. खालीलपैकी योग्य विधान कोणते आहे? [सरासरी]



(A) ∠E=∠F=∠G=∠H=90°

(B) EG=HF

(C) EF=2FG

(D) ∠HOG=90° आणि OE=OG

27. समभुज चौकोनाच्या कोणत्याही दोन क्रमवार कोनांची बेरीज किती असते? [सोपे]

(A) 60°

(B) 90°

(C) 180°

(D) 360°

28. जर समभुज चौकोनाच्या कर्णांची लांबी 18 सेमी आणि 24 सेमी असेल, तर त्या समभुज चौकोनाच्या प्रत्येक बाजूची लांबी किती? [सरासरी]

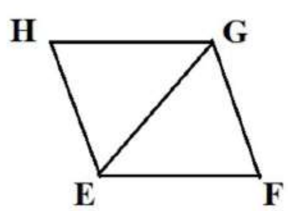
(A) 15 सेमी

(B) 16 सेमी

(C) 17 सेमी

(D) 20 सेमी

29. आकृतीमध्ये, EFGH हा समभुज चौकोन आहे. जर EF=EG असेल, तर ∠EGF चे माप किती? [सरासरी]



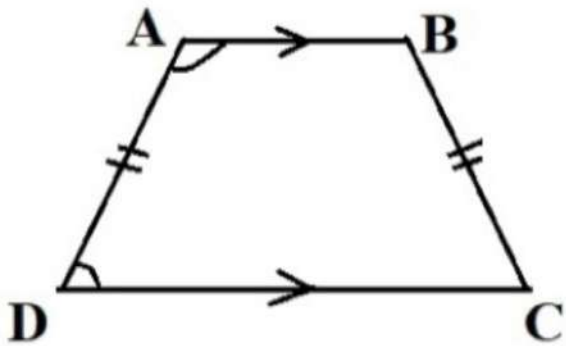
(A) 45°

(B) 50°

(C) 60°

(D) 70°

30. आकृतीमध्ये, ∠A आणि ∠D च्या मापांची बेरीज किती? [सरासरी]



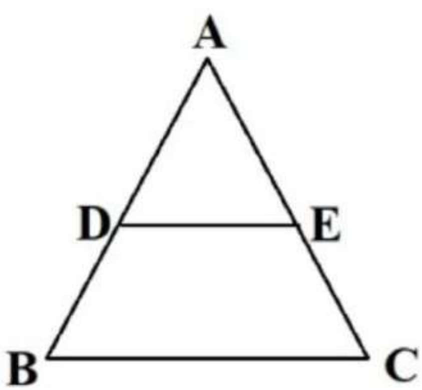
(A) 90°

(B) 180°

(C) 270°

(D) 360°

31. △ABC मध्ये, D आणि E हे अनुक्रमे AB आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत. DE आणि BC मधील संबंध काय आहे? [सोपे]



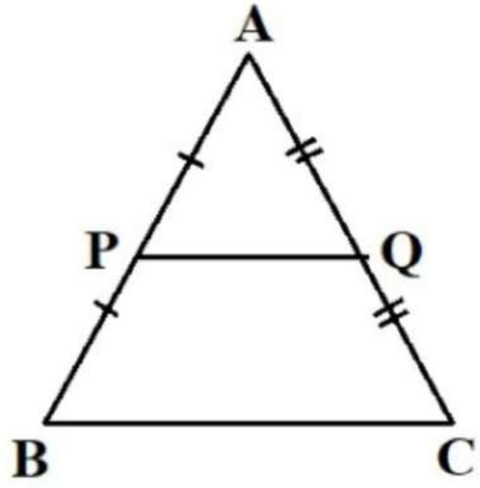
(A) DE=BC

(B) DE⊥BC

(C) DE=2BC

(D) DE=½BC

32. △ABC मध्ये, योग्य संबंध कोणता आहे? [सोपे]



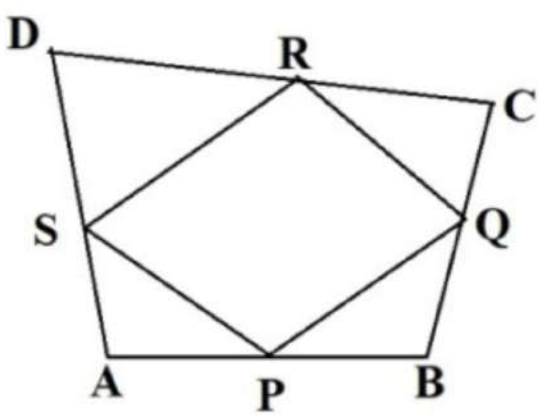
(A) PQ=2BC

(B) BC=2PQ

(C) BC=½PQ

(D) BC=3PQ

33. चौकोन ABCD मध्ये, जर P, Q, R आणि S हे अनुक्रमे AB, BC, CD आणि AD चे मध्यबिंदू असतील, तर या मध्यबिंदूंना जोडल्याने तयार होणारा चौकोन कोणता असतो? [सोपे]



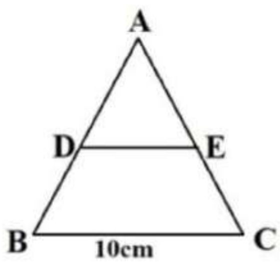
(A) समभुज चौकोन (Rhombus)

(B) चौरस (Square)

(C) आयत (Rectangle)

(D) समांतरभुज चौकोन (Parallelogram)

34. △ABC मध्ये, D आणि E हे अनुक्रमे AB आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत. जर BC=10 सेमी असेल, तर DE ची लांबी किती? [सरासरी]



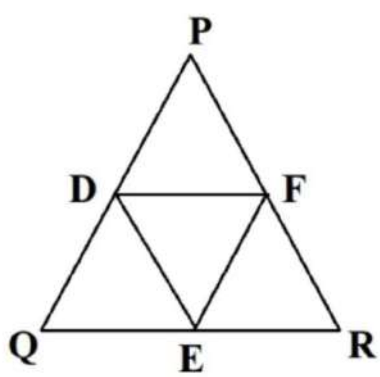
(A) 2.5 सेमी

(B) 5 सेमी

(C) 10 सेमी

(D) 20 सेमी

35. △PQR मध्ये, D, E आणि F हे अनुक्रमे PQ, QR आणि RP बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. जर △DEF ची परिमिती 24 सेमी असेल, तर △PQR ची परिमिती किती? [सरासरी]



(A) 12 सेमी

(B) 24 सेमी

(C) 48 सेमी

(D) 72 सेमी

II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (एक गुणांचे प्रश्न)

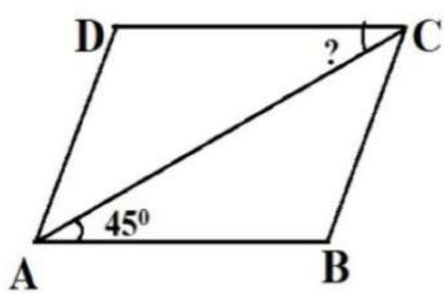
36. समांतरभुज चौकोनाचे कोणतेही दोन गुणधर्म लिहा. [सोपे]

37.समभुज चौकोनाचे कोणतेही दोन गुणधर्म लिहा. [सोपे]

38. मध्यबिंदू प्रमेयाचे (Mid-point theorem) विधान लिहा. [सोपे]

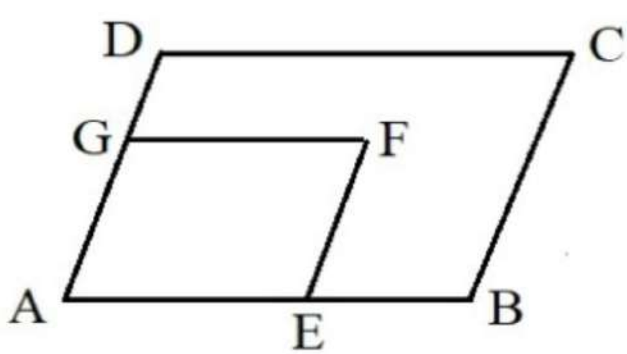
II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (एक गुणांचे प्रश्न)

39. आकृतीमध्ये, ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर ∠BAC=45° असेल, तर ∠DCA चे माप लिहा. [सरासरी]

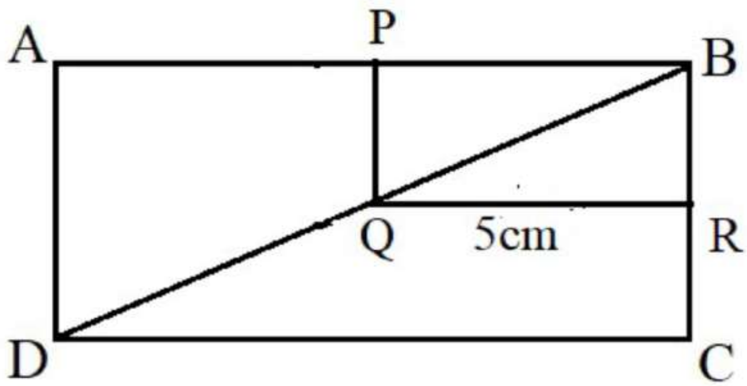


40. एका समांतरभुज चौकोनात, जर एक कोन लगतच्या कोनाच्या दुप्पट असेल, तर लगतच्या कोनांची मापे लिहा. [सरासरी]

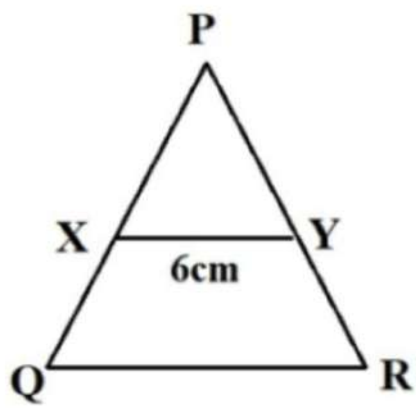
41. आकृतीमध्ये ABCD आणि AEFG हे दोन समांतरभुज चौकोन आहेत. जर ∠C=55° असेल, तर ∠AEF शोधा. [सरासरी]



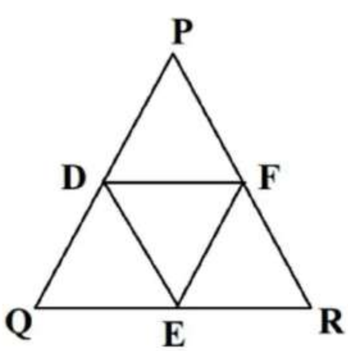
42.आकृतीमध्ये ABCD आणि PQRB हे आयत आहेत. Q हा BD चा मध्यबिंदू आहे. जर QR= 5 सेमी असेल, तर AB चे माप किती? [सरासरी]



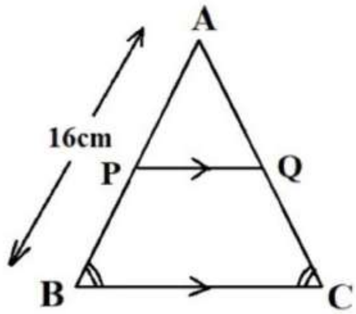
43. △PQR मध्ये, X आणि Y हे अनुक्रमे PQ आणि PR चे मध्यबिंदू आहेत. जर XY=6 सेमी असेल, तर QR ची लांबी शोधा. [सोपे]



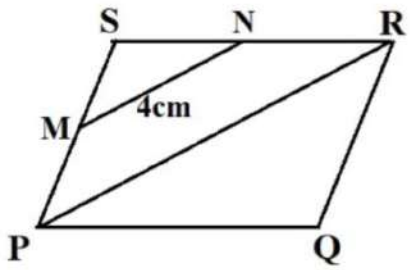
44. △PQR मध्ये, D, E आणि F हे अनुक्रमे PQ, QR आणि RP बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. जर △PQR ची परिमिती 36 सेमी असेल, तर △DEF ची परिमिती शोधा. [सरासरी]



45. △ABC मध्ये, P हा AB चा मध्यबिंदू आहे आणि AB=16 सेमी आहे. जर PQ||BC असेल, तर AQ ची लांबी लिहा. [कठीण]

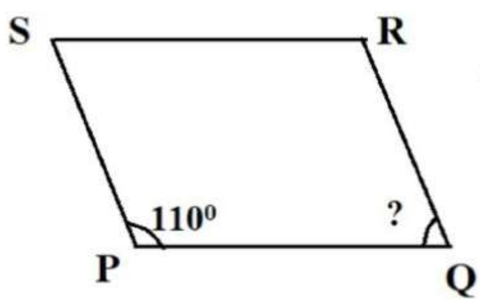


46. PQRS हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. M आणि N हे अनुक्रमे PS आणि SR चे मध्यबिंदू आहेत. जर MN=4 सेमी असेल, तर कर्ण PR ची लांबी शोधा. [सरासरी]

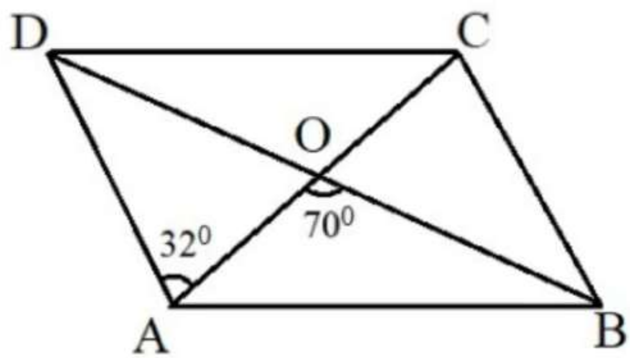


III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

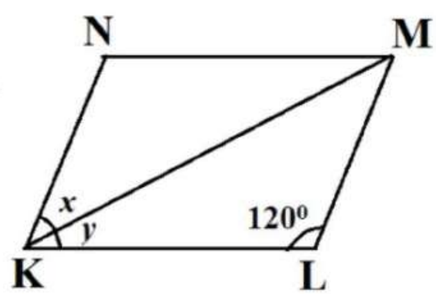
47.आकृतीमध्ये, PQRS हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर ∠P=110° असेल, तर ∠Q चे माप शोधा. [सोपे]



48. आकृतीमध्ये ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर ∠DAC=32° आणि ∠AOB=70° असेल, तर ∠DBC चे माप शोधा. [सरासरी]

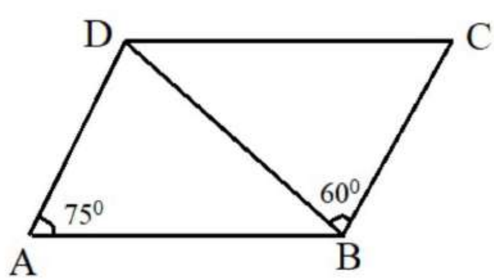


49. आकृतीमध्ये KLMN हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. 'x' आणि 'y' ची मूल्ये शोधा. [सरासरी]



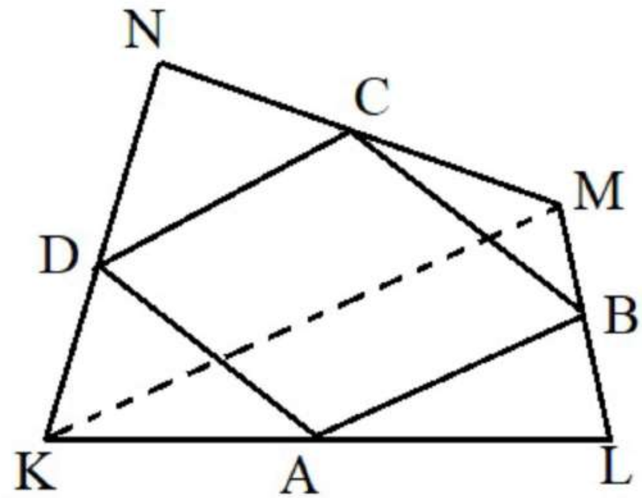
50. जर एका समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन त्याच्या लगतच्या कोनाच्या दोन तृतीयांश (2/3) असेल, तर त्या समांतरभुज चौकोनाचे कोन शोधा. [सरासरी]

51. आकृतीमध्ये ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर ∠DAB=75° आणि ∠DBC=60° असेल, तर ∠CDB आणि ∠ADB शोधा. [कठीण]

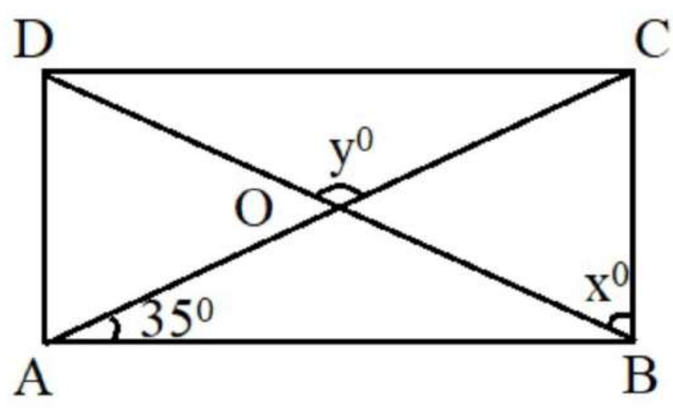


IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

52. आकृतीमध्ये KLMN हा एक चौकोन आहे. A, B, C आणि D हे अनुक्रमे KL, LM, MN आणि NK बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करा. [सरासरी]



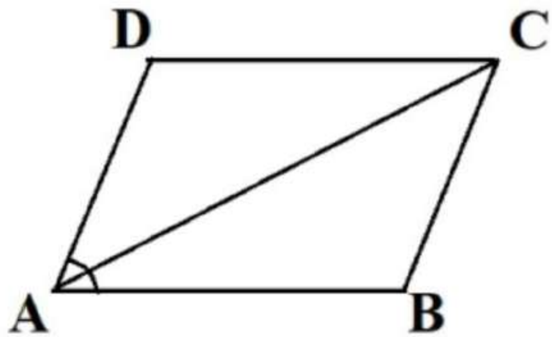
53. आकृतीमध्ये ABCD हा एक आयत आहे. x आणि y ची मूल्ये शोधा. [कठीण]



54. समांतरभुज चौकोन ABCD चा कर्ण AC, ∠A ला आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे दुभागतो. दाखवा की: [सरासरी]

(i) तो ∠C ला देखील दुभागतो.

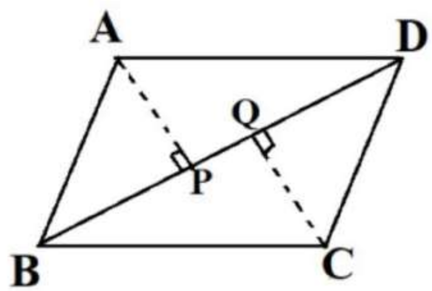
(ii) ABCD हा समभुज चौकोन आहे.



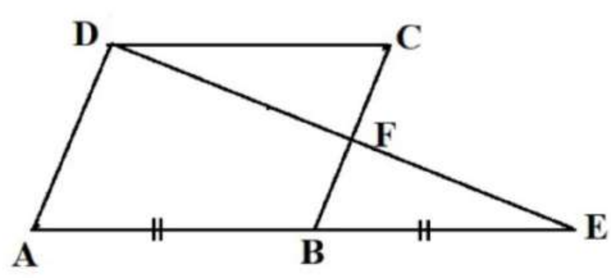
55. ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे आणि AP आणि CQ हे शिरोबिंदू A आणि C पासून कर्ण BD वर काढलेले लंब आहेत, जसे आकृतीमध्ये दाखवले आहे. दाखवा की: [सरासरी]

(i) $\triangle APB \cong \triangle CQD$

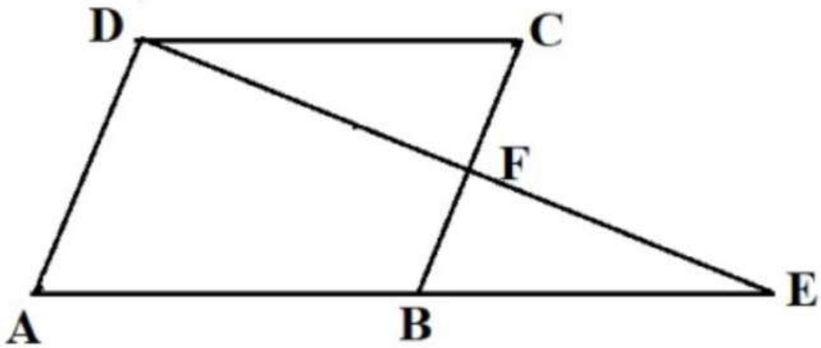
(ii) $AP = CQ$



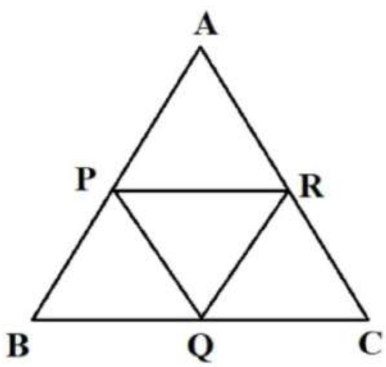
56.आकृतीमध्ये, ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. जर AB ला E पर्यंत असे वाढवले की AB=BE असेल, तर दाखवा की ED, BC ला दुभागतो. [सरासरी]



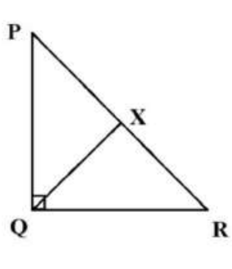
57. आकृतीमध्ये, ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC चा 'F' हा मध्यबिंदू आहे. जर AB आणि DF ला वाढवून 'E' बिंदूत भेटवले, तर दाखवा की AE=2AB. [सरासरी]



58. जर P, Q आणि R हे समभुज त्रिकोण △ABC च्या अनुक्रमे AB, BC आणि CA बाजूंचे मध्यबिंदू असतील, तर △PQR देखील एक समभुज त्रिकोण आहे हे सिद्ध करा. [सरासरी]



59. आकृतीमध्ये, △PQR हा 'Q' येथे काटकोन असलेला त्रिकोण आहे. जर 'X' हा PR चा मध्यबिंदू असेल, तर दाखवा की XP=XQ=XR. [सरासरी]



V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

60. सिद्ध करा की "समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात." [सरासरी]

61.सिद्ध करा की, "समांतरभुज चौकोनात, कोणत्याही दोन क्रमवार कोनांचे दुभाजक काटकोनात छेदतात." [कठीण]

VI. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (पाच गुणांचे प्रश्न)

62. सिद्ध करा की "त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंना जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो." [सरासरी]

63. सिद्ध करा की, "समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांचे दुभाजक एक आयत तयार करतात." [सरासरी]

64. सिद्ध करा की, "चौकोनाच्या क्रमवार बाजूंच्या मध्यबिंदूंना जोडणाऱ्या रेषा एक समांतरभुज चौकोन तयार करतात." [सरासरी]

प्रकरण 8 – चौकोन

I. बहुपर्यायी प्रश्न

1. (C) DB

2. (D) 360°

3. (A) ∠R

4. (B) आयत (Rectangle)

5. (D) 180°

6. (B) 18 सेमी

7. (D) समभुज चौकोन (Rhombus)

8. (C) ∠EDF=∠DFG

9. (A) आयत (Rectangle)

10. (D) कर्ण असमान असतात आणि एकमेकांना दुभागतात नाहीत.

11. (B) OQ = OS

12. (D) 110°

13. (B) 8 सेमी

14. (B) 72°

15. (B) 40°

16. (C) 112°

17. (D) 90°

18. (C) 30°

19. (C) आयत (Rectangle)

20. (B) 45°

21. (D) 72° आणि 108°

22. (A) 25°

23. (C) 50°

24. (D) 90°

25. (D) 40 सेमी

26. (D) ∠HOG=90° आणि OE=OG

27. (C) 180°

28. (A) 15 सेमी

29. (B) 50°

30. (B) 180°

31. (D) DE=½BC

32. (B) BC=2PQ

33. (D) समांतरभुज चौकोन (Parallelogram)

34. (B) 5 सेमी

35. (C) 48 सेमी

II. एक गुणांचे प्रश्न

36. (i) समोरील बाजू समान आणि समांतर असतात.

(ii) कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

37. (i) सर्व बाजू समान असतात.

(ii) कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.

38. त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंना जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो. (हे मध्यबिंदू प्रमेयाचे विधान आहे.)

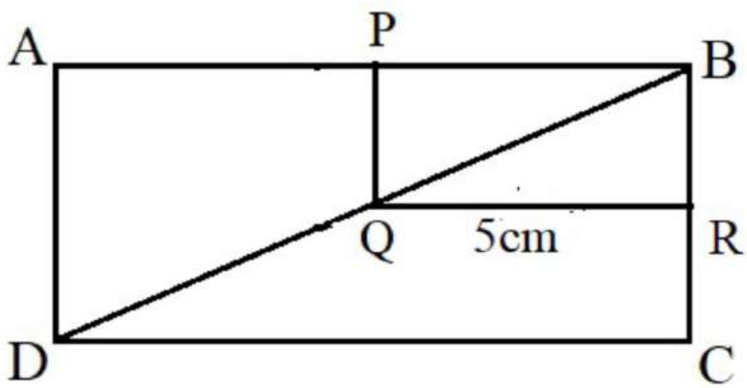
३९. दिलेले: ∠BAC=४५°

∴∠DCA=४५° (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles)

४०. ६०° आणि १२०°

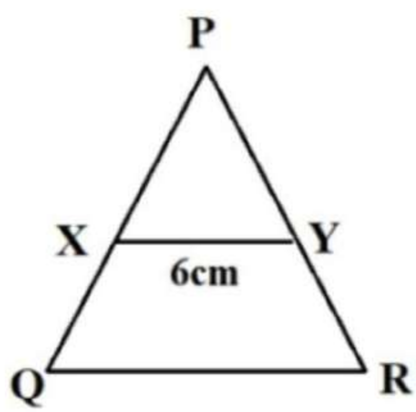
४१. ∠AEF=**१२५°**

४२. QR=PB=५ सेमी



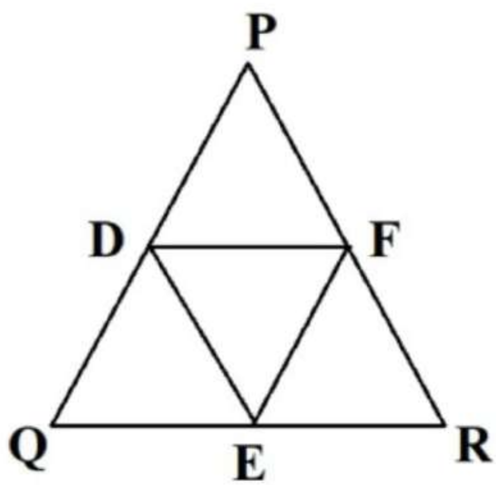
AB=AP+PB=५+५=**१०सेमी**

४३. दिलेले: XY=६ सेमी



QR=2XY=2(6)=**१२सेमी**

४४. दिलेले: △PQR ची परिमिती = ३६ सेमी

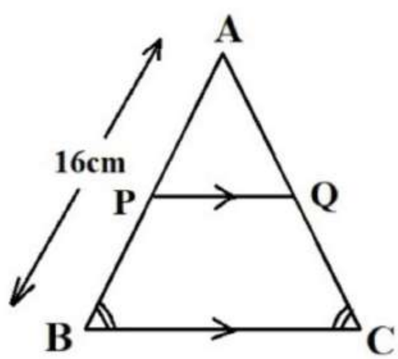


△DEF ची परिमिती = २१ (△PQR ची परिमिती)

=२१×३६

=**१८सेमी**

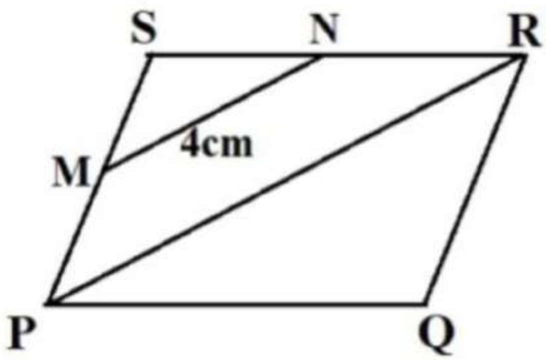
४५. △ABC मध्ये, AB=१६ सेमी



AC=१६ सेमी.

AQ=AP=**८सेमी**

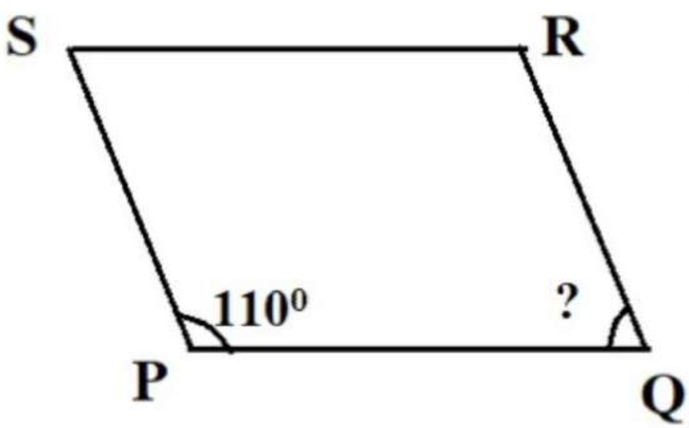
४६. MN=4 सेमी



PR=2MN=2(4)=8 सेमी

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

४७. दिलेले आहे: ∠P=110°, ∠Q=?



PQRS हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.

∠P+∠Q=180° (समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.)

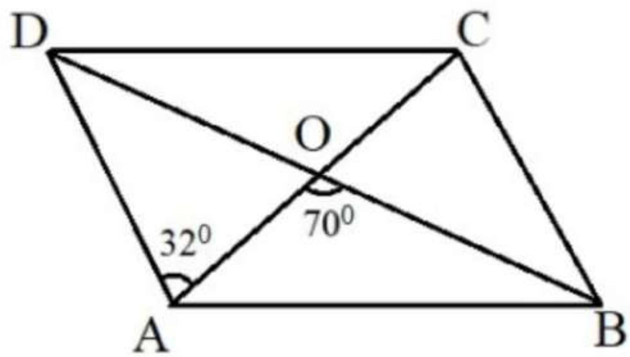
110°+∠Q=180°

$\angle Q = 180° - 110°$

$\angle Q = 70°$

---

४८. दिलेले आहे: $\angle DAC = 32°$ आणि $\angle AOB = 70°$, $\angle DBC = ?$



$\angle BOC = 180° - 70° = 110°$ (रेषीय जोडीतील कोन)

$\angle OCB = \angle DAC = 32°$ (व्युत्क्रम कोन, कारण $AB \parallel DC$)

$\triangle BOC$ मध्ये,

$\angle OCB + \angle BOC + \angle OBC = 180°$ (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$32° + 110° + \angle OBC = 180°$

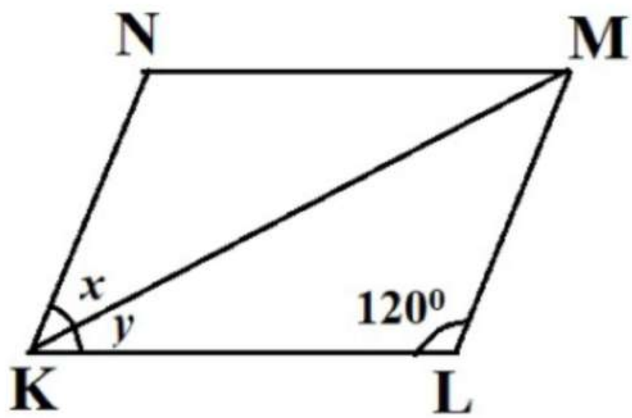
$142° + \angle OBC = 180°$

$\angle OBC = 180° - 142°$

$\angle OBC = 38°$

$\angle DBC = \angle OBC = 38°$

४९. आकृतीमध्ये, KLMN हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.



KM हा कर्ण आहे जो ∠K ला दुभागतो. (टीप: प्रश्नात 'KM हा कर्ण आहे जो ∠K ला दुभागतो' असे स्पष्टपणे दिलेले नाही, परंतु 'x = y' हे विधान त्या गृहीतकावर आधारित आहे.)

$\therefore x=y$

$\angle K+\angle L=180^\circ$ (समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.)

$x+y+120^\circ=180^\circ$ (टीप: x+y हे ∠K चे माप असावे, आणि 120° हे ∠L चे माप असावे. जर ∠L=120° असेल.)

$x+x=180^\circ-120^\circ$ (कारण x=y)

$2x=60^\circ$

$\therefore x=30^\circ$

$\therefore x=y=30^\circ$

---

५०. एका समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन 'x' मानू.

दुसरा कोन 32x असेल.

लगतच्या कोनांची बेरीज =180° (समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.)

$x+32x=180^\circ$

33x+2x=180°

35x=180°

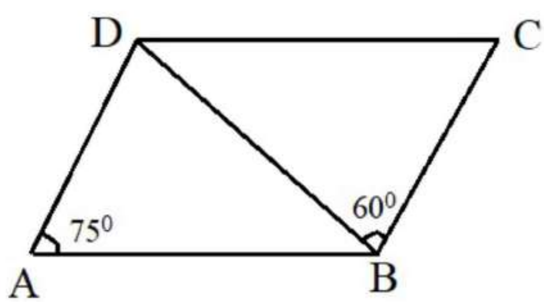
x=53×180°

x = 108°

∴ दुसरा कोन आहे = 32×x=32×108°=72°

५१.

दिलेले आहे: ∠DAB=75° आणि ∠DBC=60°. ∠CDB=? आणि ∠ADB=?



∠ADB=∠DBC (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण AD||BC)

∴∠ADB=60°

△DAB मध्ये,

∠ADB+∠DAB+∠ABD=180° (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

60°+75°+∠ABD=180°

135°+∠ABD=180°

∠ABD=180°−135°

∠ABD=45°

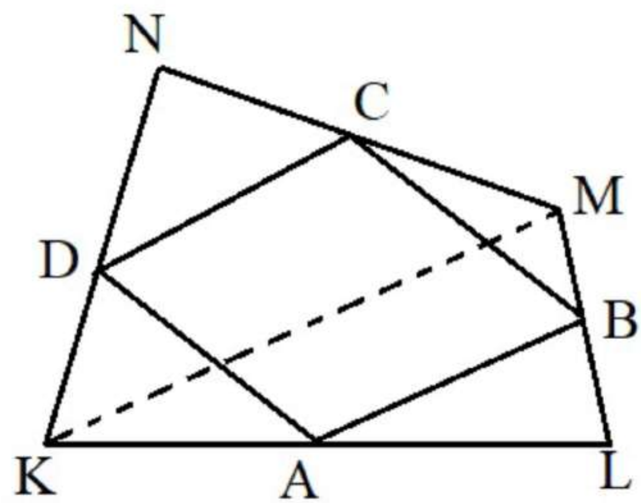
∴∠CDB=∠ABD=45° (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण AB||DC)

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

५२.

माहिती: KLMN हा एक चौकोन आहे. A, B, C आणि D हे अनुक्रमे KL, LM, MN आणि NK बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत.

सिद्ध करायचे आहे: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.



सिद्धता:

△KLM मध्ये,

AB || KM आणि AB=21KM (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार / by Midpoint theorem) ----(1)

△KMN मध्ये,

DC || KM आणि DC=21KM (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार / by Midpoint theorem) ----(2)

(1) आणि (2) वरून,

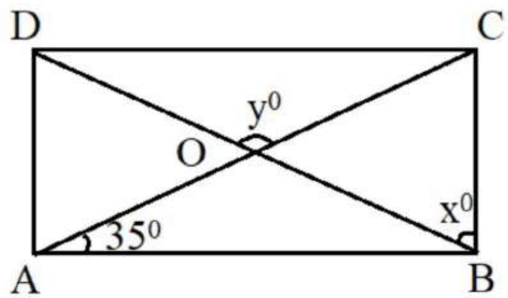
AB || DC आणि AB = DC

समोरील बाजूंची एक जोडी समान आणि समांतर आहे.

∴ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

५३.

ABCD हा एक आयत आहे.



△AOB मध्ये, OA=OB (कर्ण समान असतात आणि एकमेकांना दुभागतात / diagonals are equal and bisect each other)

∴∠OAB=∠OBA=35° (समान बाजूंच्या समोरील कोन समान असतात / angles opposite to equal sides are equal)

∠ABC=९०°

∠OBA+∠OBC=९०°

३५°+x=९०°

x=९०°−३५°

x=५५°

△AOB मध्ये,

∠AOB+∠OAB+∠OBA=१८०°

∠AOB+३५°+३५°=१८०°

∠AOB=१८०°−७०°

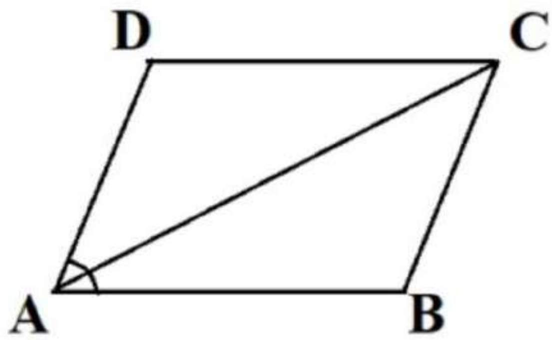
∠AOB=११०°

y=∠AOB (विरुद्ध कोन / Vertically Opposite Angles)

y=११०°

५४.

दिलेले आहे: समांतरभुज चौकोन ABCD चा कर्ण AC, ∠A ला दुभागतो.



i) सिद्धता: △ADC आणि △ABC मध्ये,

AD=BC (समोरील बाजू)

DC=BA (समोरील बाजू)

AC=AC (सामायिक बाजू)

△ADC≅△ABC (बाजू-बाजू-बाजू एकरूपता / SSS congruency)

∠ACD=∠BCA (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

म्हणून, कर्ण AC हा ∠C ला देखील दुभागतो.

ii) सिद्धता: ∠ACD=∠CAD

AD=CD (समान कोनांसमोरील बाजू समान असतात)

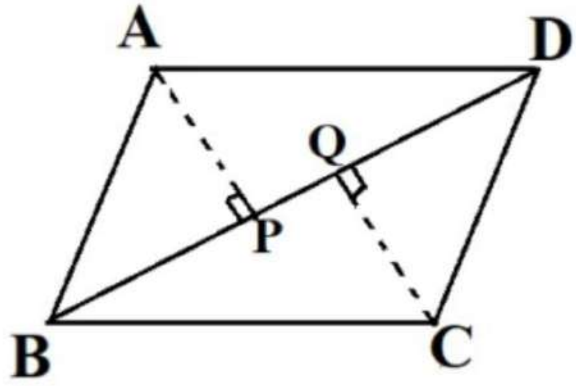
परंतु, DA=BC आणि AB=CD (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू)

∴AB=BC=CD=DA

∴ ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

५५.

दिलेले आहे: ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.



△APB आणि △CQD मध्ये,

AB=CD (समोरील बाजू)

∠APB=∠CQD=९०° (दिलेले)

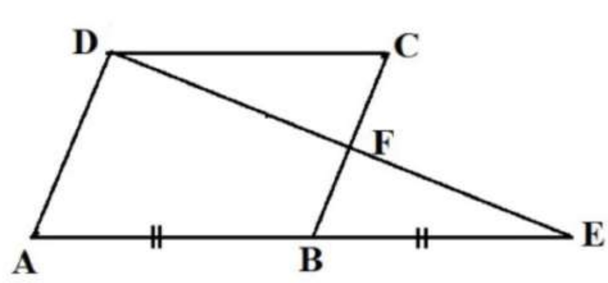
∠ABP=∠CDQ (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण AB || DC)

△APB≅△CQD (कोन-बाजू-कोन एकरूपता / ASA congruency)

आणि AP=CQ (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

५६.

दिलेले आहे: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे आणि AB=BE.



△FDC आणि △FEB मध्ये,

DC=BE (दिलेले आणि DC=AB असल्याने)

∠DCF=∠EBF (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण DC||AE)

∠CFD=∠BFE (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles)

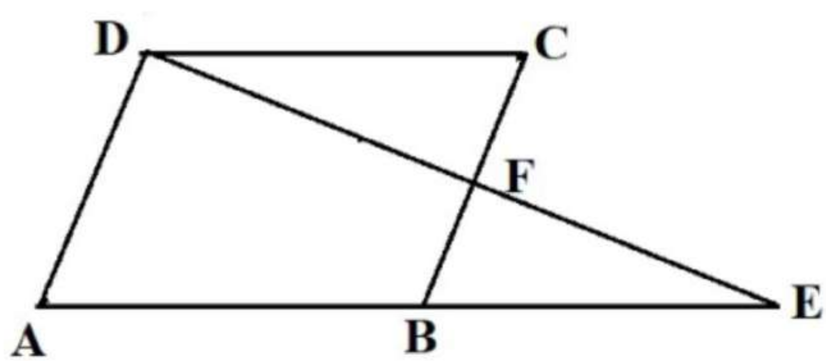
△FDC≅△FEB (कोन-कोन-बाजू एकरूपता / AAS Congruency)

∴CF=FB (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

∴ED हा BC ला दुभागतो.

७७.

दिलेले आहे: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC चा 'F' हा मध्यबिंदू आहे.



△FDC आणि △FEB मध्ये,

∠DCF=∠EBF (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण DC||AE)

∠CFD=∠BFE (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles)

CF=FB (दिलेले)

△FDC≅△FEB (कोन-बाजू-कोन एकरूपता / ASA Congruency)

∴DC=BE (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

परंतु DC=AB (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू)

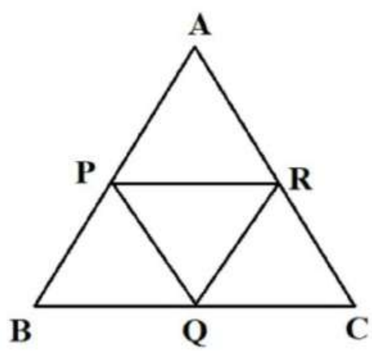
∴DC=AB=BE

∴AE=AB+BE=AB+AB

⇒AE=2AB

५८.

दिलेले आहे: ABC हा एक समभुज त्रिकोण आहे.



∴AB=BC=AC.

P आणि Q हे अनुक्रमे AB आणि BC चे मध्यबिंदू असल्याने,

PQ=21AC (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार)

त्याचप्रमाणे, PR=21BC आणि QR=21AB

AB=BC=AC हे दिलेले असल्यामुळे,

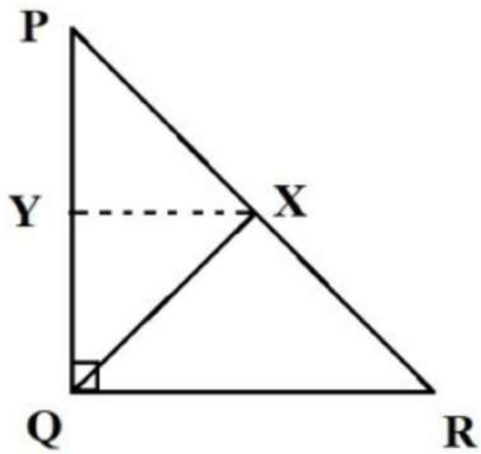
21AB=21BC=21AC

⇒QR=PR=PQ

∴△PQR देखील एक समभुज त्रिकोण आहे.

५१.

माहिती: △PQR हा 'Q' येथे काटकोन असलेला त्रिकोण आहे आणि 'X' हा PR चा मध्यबिंदू आहे.



सिद्ध करायचे आहे: XP=XQ=XR.

रचना: X मधून XY ∥ RQ काढा.

सिद्धता: आकृतीत,

∠PYX=∠PQR=९०° (संगत कोन / corresponding angles)

∴∠QYX=∠PYX=९०°

△PQR मध्ये, X हा PR चा मध्यबिंदू आहे आणि

XY ∥ RQ (रचनेनुसार / By construction)

∴ Y हा PQ चा मध्यबिंदू आहे. (मध्यबिंदू प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार / converse of midpoint theorem)

∴PY=QY

△PYX आणि △QYX मध्ये,

PY=QY (सिद्ध केले / proved)

XY=XY (सामायिक बाजू / common side)

∠QYX=∠PYX (प्रत्येक ९०° असल्यामुळे / each equal to 90°)

△PYX≅△QYX (बाजू-कोन-बाजू उपप्रमेय / SAS postulate)

∴XP=XQ (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

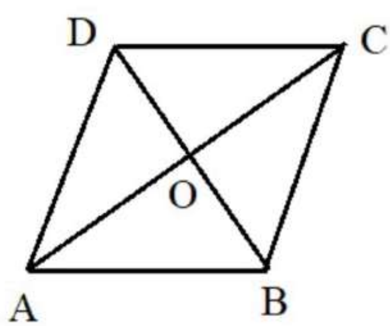
परंतु XP=XR (X हा PR चा मध्यबिंदू आहे / X is midpoint of PR)

∴XP=XQ=XR.

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

६०.

माहिती: ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. AC आणि BD हे कर्ण 'O' बिंदूत छेदतात.



सिद्ध करायचे आहे: OA=OC आणि OB=OD.

सिद्धता: △AOB आणि △COD मध्ये,

AB=DC (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू / opp. sides of a parallelogram)

∠ABO=∠CDO (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles)

∠BAO=∠OCD (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles)

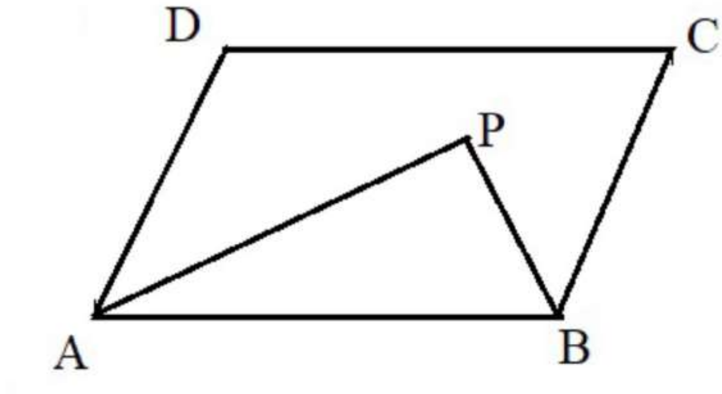
△AOB≅△COD (कोन-बाजू-कोन उपप्रमेय / ASA Postulate)

OA=OC आणि OB=OD (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

म्हणून समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

६१.

माहिती: ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. AP आणि BP हे अनुक्रमे ∠A आणि ∠B चे कोन दुभाजक आहेत.



सिद्ध करायचे आहे: ∠APB=९०°.

सिद्धता: एका समांतरभुज चौकोनात,

∠A+∠B=१८०° (समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात)

२(∠PAB) + २(∠PBA) = १८०° (AP आणि BP हे कोन दुभाजक असल्याने)

∠PAB+∠PBA=२१८०=९०° ---(१)

△APB मध्ये, ∠PAB+∠PBA+∠APB=१८०° (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

९०° + ∠APB=१८०°

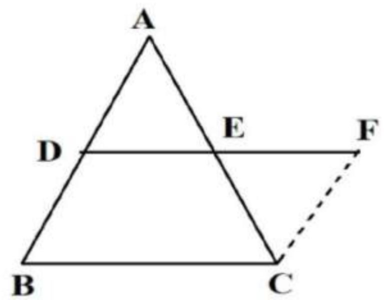
∠APB=१८०°−९०°=९०°

∴ समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्याही दोन क्रमवार कोनांचे दुभाजक काटकोनात छेदतात.

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

६२.

माहिती: △ABC मध्ये, D आणि E हे अनुक्रमे AB आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत. DE जोडलेला आहे.



सिद्ध करायचे आहे: DE||BC.

रचना: CF || BA काढा आणि DE ला वाढवून F मध्ये छेदू द्या.

सिद्धता: △AED आणि △CEF मध्ये,

∠AED=∠CEF (विरुद्ध कोन / V.O.A)

AE=CE (E हा AC चा मध्यबिंदू आहे)

∠DAE=∠FCE (व्युत्क्रम कोन / Alternate angles, कारण AB || CF)

△AED≅△CEF (कोन-बाजू-कोन निकष / ASA Criterion)

∴AD=CF आणि DE=EF (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / CPCT)

परंतु AD=BD (D हा AB चा मध्यबिंदू आहे)

आणि BD||CF (रचना / Construction)

∴BD=CF आणि BD||CF

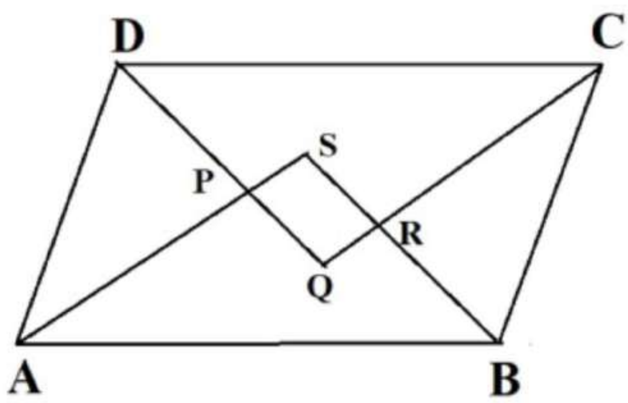
⇒BCFD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे. (समोरील बाजूंची एक जोडी समान आणि समांतर असल्याने)

DF||BC आणि DF=BC (समांतरभुज चौकोनाच्या समोरील बाजू)

⇒DE||BC (कारण DF हा DE चा विस्तारित भाग आहे)

६३.

ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.



DC||AB

∠A+∠D=१८०° (लगतचे कोन पूरक असतात)

२१∠A+२१∠D=९०° (दोन्ही बाजूंना २ ने भागल्यास)

⇒∠PAD+∠PDA=९०° (AP आणि DP हे कोन दुभाजक आहेत असे गृहीत धरून)

⇒∠APD=९०° (त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° असते)

⇒∠SPQ=९०° (विरुद्ध कोन / V.O.A - Vertically Opposite Angles)

आता, AD||BC

∠D+∠C=१८०° (लगतचे कोन पूरक असतात)

२१∠D+२१∠C=९०°

⇒∠QDC+∠QCD=९०° (DP आणि CQ हे कोन दुभाजक आहेत असे गृहीत धरून)

⇒∠DQC=९०° (त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° असते)

⇒∠PQR=९०° (विरुद्ध कोन / V.O.A)

त्याचप्रमाणे, ∠QRS=९०° आणि ∠RSP=९०°.

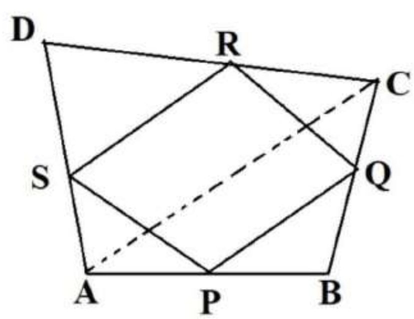
अशाप्रकारे, PQRS हा एक चौकोन आहे आणि त्याचे प्रत्येक कोन ९०° आहेत.

म्हणून, PQRS हा एक आयत आहे.

∴ समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांचे दुभाजक एक आयत तयार करतात.

६४.

माहिती: ABCD हा एक चौकोन आहे. P, Q, R आणि S हे अनुक्रमे AB, BC, CD आणि DA बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत.



सिद्ध करायचे आहे: PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

सिद्धता:

△ADC मध्ये,

SR ∥ AC आणि SR=२१AC (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार) ----(१)

△ABC मध्ये,

PQ ∥ AC आणि PQ=२१AC (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार) ----(२)

(१) आणि (२) वरून,

SR ∥ PQ आणि SR = PQ

समोरील बाजूंची एक जोडी समान आणि समांतर आहे.

∴ PQRS हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.

प्रकरण 9– वर्तुळ (CHAPTER – 9 CIRCLE)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- वर्तुळात जीवेने अंतरीत केलेल्या कोनांसंबंधीचे प्रमेय वापरून दिलेल्या आकृतीत कोनाचे माप शोधणे.
- केंद्रातून जीवेवर टाकलेल्या लंबकोनाचा गुणधर्म वापरून दिलेल्या आकृतीतील अज्ञात मूल्ये (लांबी आणि कोन) सोडवणे.
- जीवेची लांबी काढण्यासाठी त्रिज्या आणि जीवेवरील लंबाचे मूल्य वापरणे.
- वर्तुळाच्या कंसाने अंतरित केलेल्या कोनांवरील प्रमेयांचा अर्थ लावणे आणि दिलेल्या उदाहरणांमध्ये अज्ञात मूल्ये सोडवण्यासाठी त्यांचा वापर करणे.
- दिलेल्या कोनाचे मूल्य शोधण्यासाठी चक्रीय चौकोनाच्या कोनांमधील संबंधाचा वापर करणे.

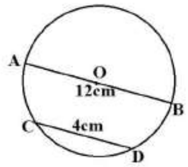
अध्ययन अंश (TEACHING POINTS):

- वर्तुळाशी संबंधित मूलभूत संकल्पना, चक्रीय चौकोन समजून घेणे.
- प्रमेय तार्किकदृष्ट्या सिद्ध करणे आणि समस्या सोडवण्यासाठी त्यांचा वापर करणे.

सोपे (EASY)	सरासरी (AVERAGE)	कठीण (DIFFICULT)	एकूण (TOTAL)
12	29	09	50

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला 1 गुण आहे)

1. 'O' केंद्र असलेले एक वर्तुळ दिले आहे, ज्याची लहान जीवा CD ची लांबी 4 सेमी आहे, आणि सर्वात लांब जीवा AB 12 सेमी आहे, तर वर्तुळाची त्रिज्या किती आहे? (सोपे)



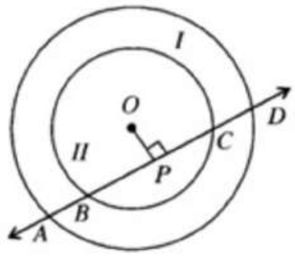
(A) 2 सेमी

(B) 4 सेमी

(C) 6 सेमी

(D) 12 सेमी

२. O केंद्र असलेली दोन समकेंद्री वर्तुळे दिली आहेत. एक रेषा वर्तुळांना अनुक्रमे A, B, C, D बिंदूत छेदते. जर AB = ३ सेमी असेल, तर CD ची लांबी किती? (सोपे)



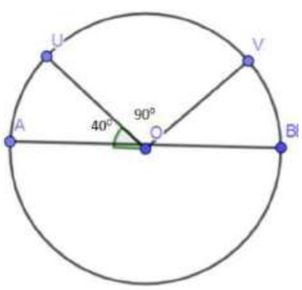
A) 1.5 सेमी

(B) 3 सेमी

(C) 6 सेमी

(D) 12 सेमी

3. दिलेल्या वर्तुळात O केंद्र आहे. जर ∠AOU=40°, तर ∠U चे माप किती? (सोपे)



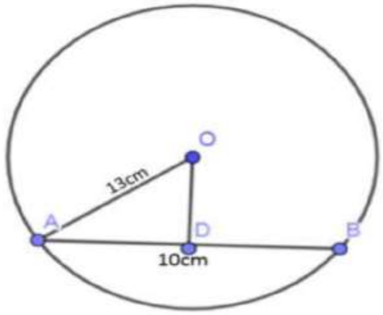
(A) 50°

(B) 80°

(C) 90°

(D) 180°

4. दिलेल्या O केंद्र असलेल्या वर्तुळात, जीवा AB = 10 सेमी आणि AO=13 सेमी आहे. केंद्रापासून जीवेचे अंतर किती आहे? (सोपे)



(A) 5 सेमी

(B) 10 सेमी

(C) 12 सेमी

(D) 13 सेमी

5. AD हा वर्तुळाचा व्यास आहे आणि AB ही एक जीवा आहे. जर AD=34 सेमी, AB=30 सेमी असेल, तर वर्तुळाच्या केंद्रापासून AB चे अंतर किती? (सोपे)

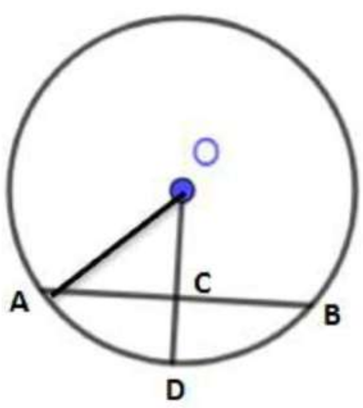
(A) 17 सेमी

(B) 15 सेमी

(C) 4 सेमी

(D) 8 सेमी

6. दिलेल्या आकृतीत, जर OA=5 सेमी, AB=8 सेमी आणि OD⊥AB असेल, तर CD किती आहे? (सोपे)



(A) 2 सेमी

(B) 3 सेमी

(C) 4 सेमी

(D) 5 सेमी

7. जर AB=12 सेमी, BC=16 सेमी आणि AB⊥BC असेल, तर A, B आणि C बिंदूंमधून जाणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या किती? (सोपे)

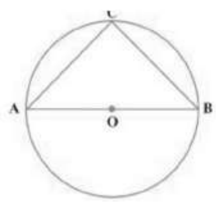
(A) 6 सेमी

(B) 8 सेमी

(C) 10 सेमी

(D) 14 सेमी

8. आकृतीमध्ये जर AOB हा वर्तुळाचा व्यास असेल आणि AC=BC असेल, तर ∠CAB किती आहे? (सोपे)



(A) 30°

(B) 60°

(C) 90°

(D) 45°

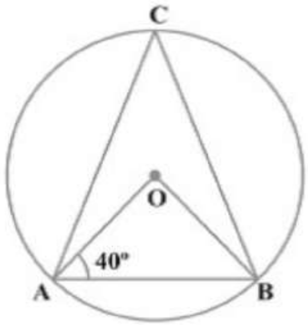
9. आकृतीमध्ये, जर ∠OAB=40° असेल, तर ∠ACB कशाच्या समान आहे? (सरासरी)

(A) 50°

(B) 40°

(C) 60°

(D) 70°



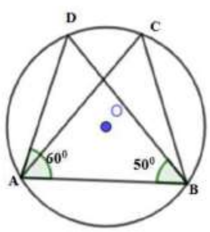
10. आकृतीमध्ये, जर ∠DAB=60° आणि ∠ABD=50° असेल, तर ∠ACB कशाच्या समान आहे? (सरासरी)

(A) 60°

(B) 50°

(C) 70°

(D) 80°



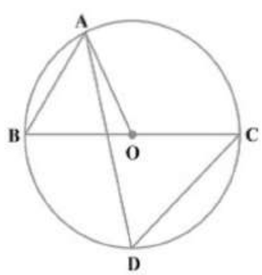
11. आकृतीमध्ये BC हा वर्तुळाचा व्यास आहे आणि ∠BAO=60° आहे. तर ∠AOC चे माप किती आहे? (सरासरी)

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 120°



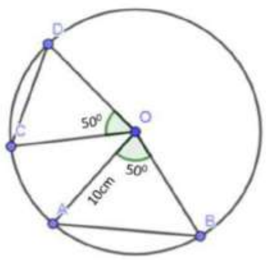
12.दिलेल्या O केंद्र असलेल्या वर्तुळात, ∠AOB=∠COD=50°, DC=10 सेमी आहे. तर AB ची लांबी किती आहे? (सरासरी)

(A) 5 सेमी

(B) 10 सेमी

(C) 15 सेमी

(D) 20 सेमी



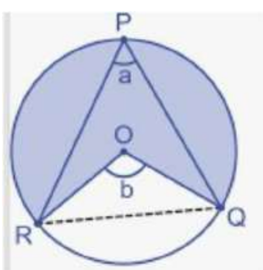
13. दिलेल्या आकृतीत O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. 'a' आणि 'b' मधील योग्य संबंध कोणता आहे? (सरासरी)

(A) a=21b

(B) a=b

(C) a=2b

(D) a=3b



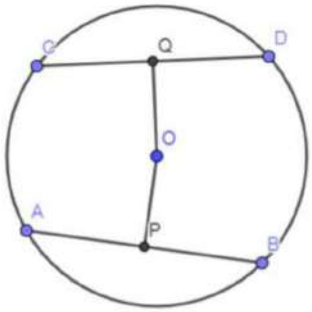
14. दिलेल्या आकृतीत O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, OP⊥AB, OQ⊥CD आहे. जर OP=OQ आणि CD=8 सेमी असेल, तर AB=? (सरासरी)

(A) 2 सेमी

(B) 4 सेमी

(C) 5 सेमी

(D) 8 सेमी



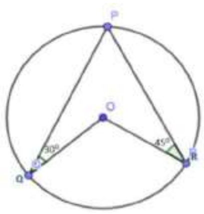
15. दिलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करा, O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. ∠QOR चे माप किती आहे? (सरासरी)

(A) 30°

(B) 50°

(C) 65°

(D) 130°



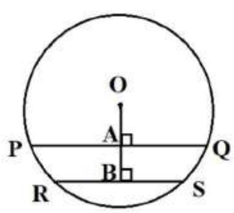
16. दिलेल्या वर्तुळात O हे केंद्र असून त्याची त्रिज्या 10 सेमी आहे, PQ=12 सेमी आणि RS=16 सेमी आहे, तर AB चे माप किती? (कठीण)

(A) 2 सेमी

(B) 4 सेमी

(C) 14 सेमी

(D) 16 सेमी



17. दिलेल्या वर्तुळात O हे केंद्र आहे, तर y चे माप किती आहे? (सोपे)

(A) 35°

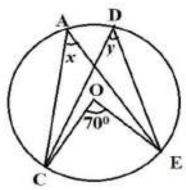
(B) 70°

(C) 70 + x

(D) 140°

(टीप: या प्रश्नासाठी आकृती आवश्यक आहे, जी y आणि x चे स्थान दर्शवेल.)

18. O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, AB आणि CD या अनुक्रमे 5 सेमी आणि 6 सेमी लांबीच्या दोन जीवा आहेत आणि या जीवा वर्तुळाच्या केंद्रावर अनुक्रमे x° आणि y° कोन अंतरित करतात, तर (सरासरी)



(A) x=y

(B) x<y

(C) x>y

(D) x□=y

19. दिलेल्या आकृतीमध्ये, O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, ∠DBC=55°, ∠BAC=45°, तर ∠BCD किती आहे? (सरासरी)

(A) 50°

(B) 55°

(C) 100°

(D) 80°



20. ABCD हा एक चक्रीय चौकोन आहे, ज्यात AB हा त्याला परिवेष्टित करणाऱ्या वर्तुळाचा व्यास आहे आणि ∠ADC=140° आहे, तर ∠BAC चे माप किती आहे? (कठीण)

(A) 80°

(B) 40°

(C) 50°

(D) 120°

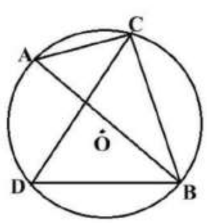
21. दिलेल्या आकृतीत O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. जर ∠BAC:∠ABC=4:5 असेल, तर ∠BDC चे मूल्य किती आहे? (सरासरी)

(A) 100°

(B) 40°

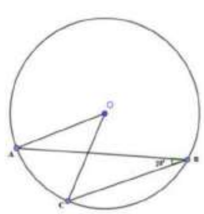
(C) 55°

(D) 90°



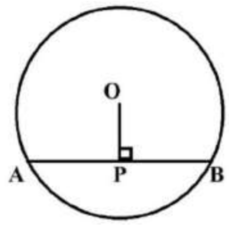
II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

22. आकृतीमध्ये, जर ∠ABC=20° असेल, तर ∠AOC चे माप शोधा. (सरासरी)

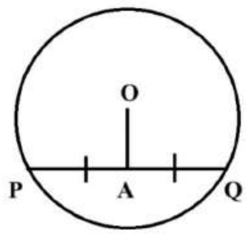


23. चक्रीय चौकोनाच्या विरुद्ध कोनांच्या कोणत्याही जोडीच्या मापांची बेरीज किती असते, ते लिहा. (सरासरी)

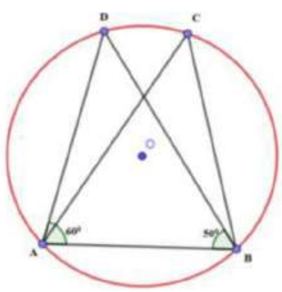
24. आकृतीमध्ये O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, PB=4 सेमी आहे. जीवा AB ची लांबी शोधा. (सोपे)



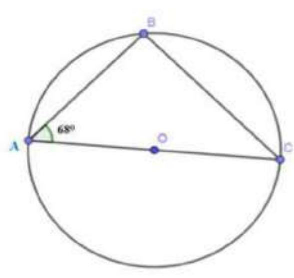
25. दिलेल्या O केंद्र असलेल्या वर्तुळात PQ ही एक जीवा आहे. जर PA=AQ असेल, तर PQ आणि OA मधील संबंध लिहा. (सोपे)



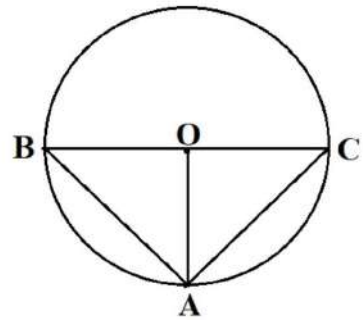
26. आकृतीमध्ये जर ∠BAC=60°, ∠ABD=50° असेल, तर ∠ACB चे माप शोधा. (सरासरी)



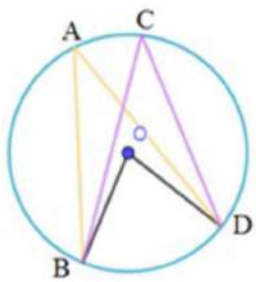
27. दिलेल्या O केंद्र असलेल्या वर्तुळात, AC हा व्यास आहे. ∠BAO=68° असेल, तर ∠BCO चे माप शोधा. (सोपे)



28. दिलेल्या O केंद्र असलेल्या वर्तुळात, AB=AC. जर ∠BOA=90° असेल, तर ∠AOC चे माप निश्चित करा. (सरासरी)



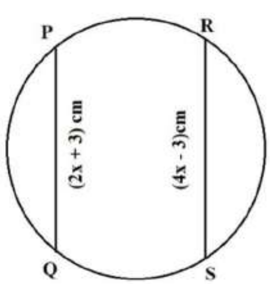
29. दिलेल्या आकृतीत O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. ∠A=∠C आहे. कारण द्या. (सोपे)



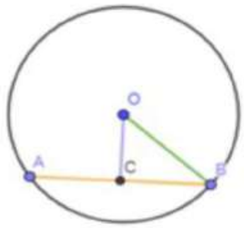
30. **चक्रीय चौकोनाची व्याख्या द्या**. (सोपे)

III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

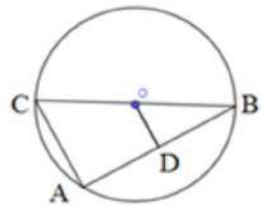
31. आकृतीमध्ये PQ आणि RS या वर्तुळाच्या समान जीवा आहेत. x चे मूल्य शोधा. (सरासरी)



32. आकृतीमध्ये O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, B त्याच्या केंद्रापासून 12 सेमी अंतरावर आहे आणि जीवा AB ची लांबी 10 सेमी आहे. केंद्रापासून जीवेचे अंतर शोधा. (सरासरी)

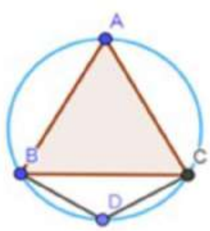


33. जर O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा BC हा व्यास असेल आणि OD हा वर्तुळाच्या जीवा AB ला लंब

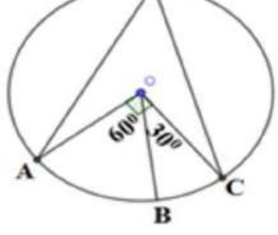


असेल, तर AC=2(OD) हे दाखवा. (सरासरी)

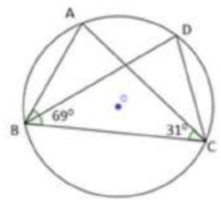
34. दिलेल्या आकृतीमध्ये △ABC हा एक समभुज त्रिकोण आहे आणि ABCD हा एक चक्रीय चौकोन आहे, तर ∠BDC चे माप शोधा. (सरासरी)



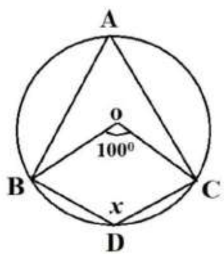
35. आकृतीमध्ये A, B आणि C हे O केंद्र असलेल्या वर्तुळावरील तीन बिंदू असे आहेत की ∠BOC=30° आणि ∠AOB=60°. जर D हा कंस ABC व्यतिरिक्त वर्तुळावरील एक बिंदू असेल, तर ∠ABC चे माप शोधा. (सरासरी)



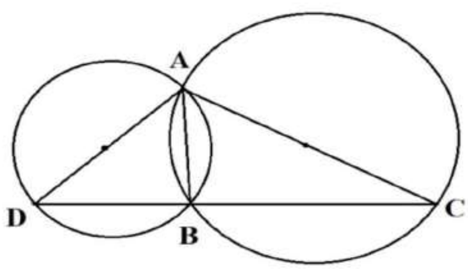
36.. आकृतीमध्ये, ∠ABC=69°, ∠ACB=31° आहे. ∠BDC चे माप शोधा. (सरासरी)



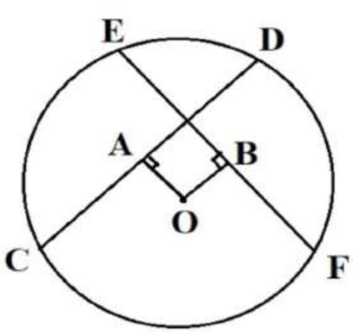
37. आकृतीमध्ये, O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. जर ∠BOC=100° असेल, तर x चे मूल्य शोधा. (सरासरी)



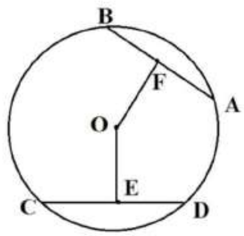
38. आकृतीमध्ये दोन वर्तुळे A आणि B या दोन बिंदूंमध्ये छेदतात. AD आणि AC हे त्या दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत. DBC हा एक रेषाखंड आहे हे सिद्ध करा. (सरासरी)



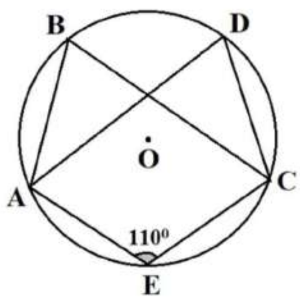
39. दिलेल्या आकृतीमध्ये, OA आणि OB हे O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा CD आणि EF यांना अनुक्रमे लंब आहेत. जर OA=OB असेल, तर कंस EC = कंस DF हे सिद्ध करा. (कठीण)



40. दिलेल्या आकृतीमध्ये O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. जर OE<OF असेल, तर CD>AB हे दाखवा. (सरासरी)

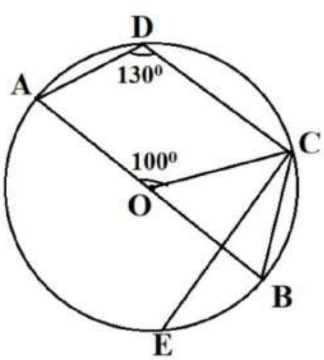


41. दिलेल्या आकृतीमध्ये, ABCE हा एक चक्रीय चौकोन आहे आणि O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. जर ∠AEC=110° असेल, तर ∠ABC आणि ∠ADC चे माप शोधा. (सरासरी)



IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

42. दिलेल्या आकृतीमध्ये, O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे, ∠ADC=130° आणि जीवा BC = जीवा BE आहे. angle CBE चे माप शोधा. (कठीण)

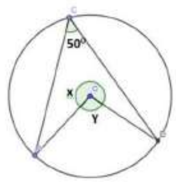


IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

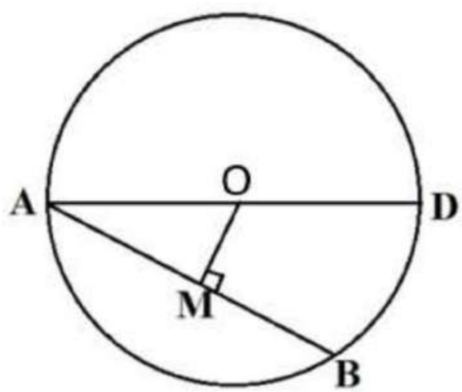
43. जर त्रिकोणाच्या दोन बाजूंना व्यास मानून वर्तुळे काढली, तर **या वर्तुळांचा छेदनबिंदू तिसऱ्या बाजूवर असतो हे सिद्ध करा.** (सरासरी)

---

44. आकृतीमध्ये, O हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. x चे मूल्य शोधा. (सरासरी)



45. AD हा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे आणि AB ही एक जीवा आहे. जर AD=34 सेमी, AB=30 सेमी असेल, तर **वर्तुळाच्या केंद्रापासून AB चे अंतर शोधा.** (सरासरी)

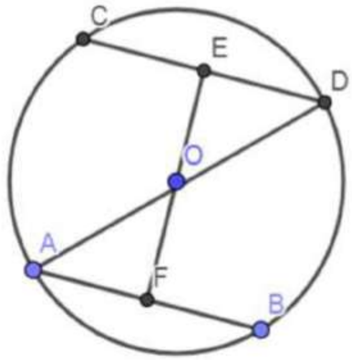


46. "जर वर्तुळाच्या केंद्रावर जीवांनी अंतरित केलेले कोन समान असतील, तर त्या जीवा समान असतात" हे सिद्ध करा. (सरासरी)

V. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

47. जर चक्रीय चौकोनाचे कर्ण विरुद्ध शिरोबिंदूंमधून जाणाऱ्या वर्तुळाचे व्यास असतील, तर **तो चौकोन आयत आहे हे सिद्ध करा.** (सरासरी)

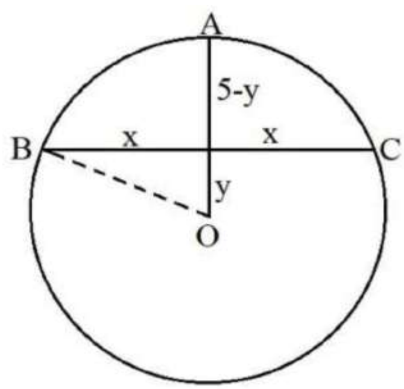
48. आकृतीमध्ये AB∥CD आहे. AD हा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. AB=CD हे सिद्ध करा. (कठीण)



VI. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (पाच गुणांचे प्रश्न)

49 **"चक्रीय चौकोनाच्या विरुद्ध कोनांच्या कोणत्याही जोडीची बेरीज पूरक (Supplementary) असते" हे सिद्ध करा.** (सरासरी)

50. O केंद्र असलेल्या वर्तुळात, त्रिज्या 5 सेमी आहे, AB आणि AC या प्रत्येकी 6 सेमी लांबीच्या दोन जीवा आहेत. **जीवा BC ची लांबी शोधा.** (कठीण)



प्रकरण 9– वर्तुळ

I. बहुपर्यायी प्रश्न

1. C) 6 सेमी

2. B) 3 सेमी

3. A) 40°

4. C) 12 सेमी

5. D) 8 सेमी

6. A) 2 सेमी

7. C) 10 सेमी

8. D) 45°

9. A) 50°

10. C) 70°

11. C) 60°

12. B) 10 सेमी

13. A) $a = \frac{1}{2}ab$

14. D) 8 सेमी

15. D) 130°

16. A) 2 सेमी

17. A) 35°

18. B) $X < Y$

19. D) 80°

20. B) 50°

21. B) 40°

II. एक गुणांचे प्रश्न

22. $40°$

23. $180°$

24. 8 सेमी

25. OA हा PQ ला लंब आहे.

26. $70°$

27. $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

$68°+90°+\angle C=180°$

$\angle C=180°-158°$

$\angle C=22°$

28. $\angle AOC=90°$

29. एकाच वर्तुळखंडात समाविष्ट असलेले कोन समान असतात. (Angles subtended in the same segment of a circle are equal.)

30. जर चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू वर्तुळावर असतील, तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन (Cyclic Quadrilateral) म्हणतात.

III. दोन गुणांचे प्रश्न

31.

$2x+3=4x-3$

$2x-4x=-3-3$

$-2x=-6$

$x=3$

32.

$OC\perp AB$

त्यामुळे $AC=BC=21AB$

$OC2=OB2-CB2$

OC2=122–52

OC2=144–25=119

OC=119

33.

OD⊥AB असल्याने, "D" हा AB चा मध्यबिंदू आहे.

△ABC मध्ये, O आणि D हे अनुक्रमे BC आणि AB चे मध्यबिंदू आहेत.

त्यामुळे OD∥AC आणि OD=21AC (मध्यबिंदू प्रमेयानुसार(

त्यामुळे CA=2OD

34.

△ABC हा समभुज त्रिकोण आहे.

∠BAC=60°

∠BDC+∠BAC=180° (चक्रीय चौकोनाचे विरुद्ध कोन पूरक असतात, जर BADC हा चक्रीय चौकोन असेल(

∠BDC=180°−60°=120°

35.

AB आणि BC जोडा.

reflex∠AOC=360°–(60°+30°)=270°

त्यामुळे ∠ABC=270°/2=135° (वर्तुळाच्या परिघावरील कोन केंद्रावरील कोनाच्या निम्मा असतो(.

36.

∠BAC=∠BDC (एकाच वर्तुळखंडातील कोन(

त्यामुळे ∠ABC+∠BAC+∠ACB=180° (त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज(

∠BAC=180°–69°–31°=80°

37.

"O" हे वर्तुळाचे केंद्र आहे.

त्यामुळे $\angle BAC=1/2\angle BOC=1/2\times100°=50°$

$\angle X=180°-\angle BAC=180°-50°=130°$ (जर AXBC हा चक्रीय चौकोन असेल(

38.

AB जोडा.

$\angle ABD=90°$ (अर्धवर्तुळातील कोन / angle in a semicircle)

$\angle ABC=90°$ (अर्धवर्तुळातील कोन / angle in the semicircle)

त्यामुळे, $\angle ABD+\angle ABC=90°+90°=180°$

म्हणून, DBC ही एक रेषा आहे.

39.

OA=OB (त्रिज्या)

CD=EF (दिलेले)

कंस DC = कंस EF (समान जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात / Corresponding arcs of the equal chords are congruent)

कंस EC + कंस DE = कंस DE + कंस FD

कंस EC = कंस FD हे सिद्ध झाले.

40.

जर OE=OF असेल तर याचा अर्थ CD=AB (केंद्रापासून समान अंतरावर असलेल्या जीवा समान असतात / chords equidistant from the centre are equal).

परंतु OE<OF (दिलेले).

त्यामुळे CD>AB (केंद्राच्या जवळची जीवा लांब असते / chords nearer to the centre is longer).

41.

चक्रीय चौकोनात $\angle ABC+\angle AEC=180°$

$\angle ABC+110°=180°$

$\angle ABC=70°$

∠ABC=∠ADC=70° (चक्रीय चौकोनाचे विरुद्ध कोन पूरक असतात - येथे विरुद्ध कोनांची समानता चुकीची आहे, ती ∠ABC+∠ADC=180∘ अशी असावी(

(टीप: "∠ABC=∠ADC=70°" हे विधान चुकीचे आहे. चक्रीय चौकोनात विरुद्ध कोन पूरक (supplementary) असतात, समान (equal) नसतात. योग्य विधान ∠ABC+∠ADC=180° असे असावे. त्यामुळे, जर ∠ABC=70° असेल तर ∠ADC=110°.)

III तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

42.

reflex∠AOC=2×∠ADC=2×130°=260°

∠AOC=360°−260°=100°

∠COB=180°–100°=80° (रेषीय जोडीतील कोन / Linear pair, जर AOB सरळ रेषा असेल तर(

∠CEB=21∠COB=21×80°=40° (केंद्रावरील कोनाच्या निम्म्या परिघावरील कोन असतो(

△OCB मध्ये, OC=OB (त्रिज्या)

∠OCB=∠OBC (समान बाजूंचे समोरील कोन समान(

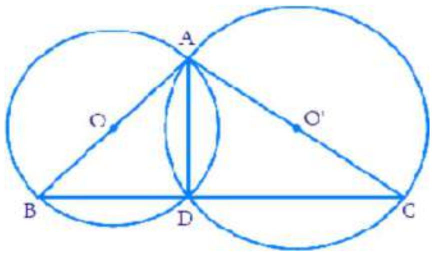
जर ∠COB=80° असेल, तर ∠OCB=∠OBC=(180°−80°)/2=50°.

त्यामुळे ∠CEB=∠ECB=40° हे विधान चुकीचे आहे. ∠CEB=40° असेल, परंतु △CEB मधील ∠ECB चे माप हे △OCB मधील ∠OCB च्या मापावर अवलंबून असेल.

∠CBE=180°–(40°+40°)=100° (येथे △CEB मधील कोनांची बेरीज गृहीत धरली आहे, परंतु ∠CEB=∠ECB=40∘ हे चुकीचे असू शकते.(

43.

आपल्याला माहीत आहे की, अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो. हे सिद्ध केल्याने D हा BC वरील बिंदू आहे हे सिद्ध होते, ज्यामुळे वर्तुळांचा छेदनबिंदू तिसऱ्या बाजूवर आहे हे सिद्ध होईल.



अर्धवर्तुळातील कोन असल्यामुळे:

∠ADB=90°

∠ADC=90°

∠ADB+∠ADC=90°+90°

⇒∠ADB+∠ADC=180°

⇒ BDC ही एक सरळ रेषा आहे.

D बिंदू BC वर आहे.

म्हणून, वर्तुळांचा छेदनबिंदू तिसऱ्या बाजू BC वर आहे.

44.

∠BAC=1/2Y

50°=1/2Y

Y=100°

∠X+∠Y=360° (वर्तुळाच्या केंद्रावरील कोन(

∠X+100°=360°

∠X=360°−100°

∠X=260°

45.

AM=MB=1/2AB=1/2(30)=15 सेमी

△OMA मध्ये,

पायथागोरस प्रमेय वापरून,

OA2=OM2+AM2

किंमती घालून,

172=OM2+152

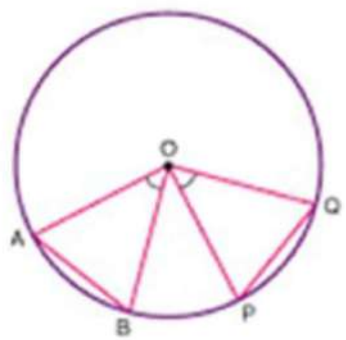
पुढील गणना करून,

OM2=289−225=64

म्हणून आपल्याला OM=8 सेमी मिळते.

46.

दिलेले आहे: O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या दोन जीवा AB आणि CD, जिथे ∠AOB=∠COD.



सिद्ध करायचे आहे: AB=CD.

रचना: OA, OB, OC आणि OD जोडा (वर्तुळाच्या त्रिज्या).

सिद्धता:

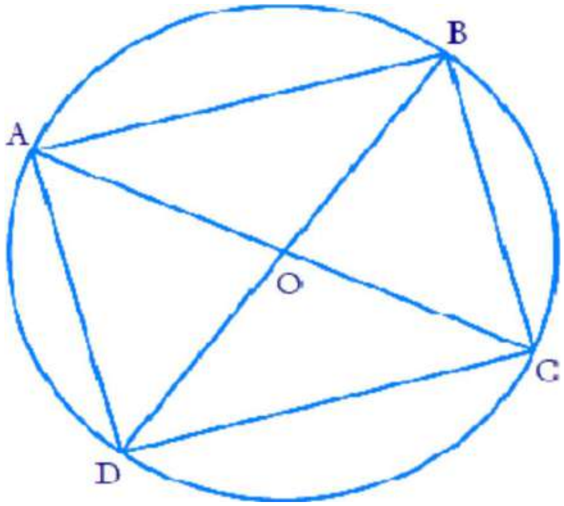
- △AOB आणि △COD मध्ये:
  - OA=OD (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)
  - ∠AOB=∠COD (दिलेले)
  - OB=OC (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)
- म्हणून, बाजू-कोन-बाजू (SAS) एकरूपता प्रमेयानुसार, △AOB≅△COD.
- त्रिकोण एकरूप असल्यामुळे, त्यांचे संगत भाग समान आहेत.
- अशाप्रकारे, AB=CD (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू).

म्हणून, जर केंद्रावर दोन जीवांनी अंतरित केलेले कोन समान असतील तर त्या जीवा समान असतात.

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

47.

दिलेले: BD हा वर्तुळाचा व्यास आहे, जो जीवा देखील आहे.



सिद्धता:

त्यामुळे, ∠BOD=१८०°.

AC आणि BD हे वर्तुळाचे व्यास असल्याने,

⇒AC=BD.

आपल्याला माहीत आहे की, एका कंसाने केंद्रावर केलेला कोन, वर्तुळाच्या उर्वरित भागातील कोणत्याही बिंदूवर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.

∴∠BAD=1/2×∠BOD=90°.

त्याचप्रमाणे, ∠BCD=90°.

आता, AC ला वर्तुळाचा व्यास मानून, आपल्याला मिळते:

आपल्याला माहीत आहे की, एका कंसाने केंद्रावर केलेला कोन, वर्तुळाच्या उर्वरित भागातील कोणत्याही बिंदूवर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.

∠ABC=1/2×∠AOC=90°.

त्याचप्रमाणे, ∠ADC=90°.

आता आपण त्रिकोणांचा विचार करूया:

∠ABC=∠BAD [प्रत्येकी 90°]

AB=BA [त्रिकोण ABC आणि BAD ची सामायिक बाजू]

AC=BD [वर्तुळाचा व्यास]

(टीप: येथे सिद्धता अपूर्ण आहे. पुढचा भाग दिलेला नाही. दोन त्रिकोण एकरूप सिद्ध करण्यासाठी अधिक माहिती आवश्यक आहे, जसे की SAS किंवा ASA एकरूपता कसोटी वापरणे.)

∴△ABC≅△BAD [RHS एकरूपता निष्कर्षानुसार / By RHS congruence criteria]

⇒BC=AD [एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग प्रमेयानुसार / By Corresponding parts of Congruent triangles theorem]

त्याचप्रमाणे, AB=DC.

जसे आपण पाहू शकता, कोपऱ्यावरील सर्व कोन ९०° आहेत आणि समोरील बाजू समान आहेत. आपण म्हणू शकतो की ABCD शिरोबिंदूंना जोडणारा आकार आयत आहे.

48.

△DOQ आणि △AOP मध्ये,

OD=OA (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या / radii of same circle)

∠DOQ=∠AOP (विरुद्ध कोन / vertically opposite angles)

∠QDO=∠PAO (व्युत्क्रम कोन, CD || AB असल्यामुळे / alternate angle CD || AB)

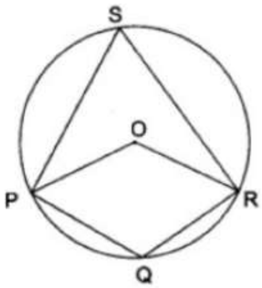
△DOQ हे △AOP शी एकरूप आहे.

OQ=OP (एकरूप त्रिकोणांचे संगत भाग / by CPCT)

CD=AB (केंद्रापासून समान अंतरावर असलेल्या जीवा समान असतात / chords equidistant from the centre of a circle are equal).

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

49.



$\Rightarrow \quad \angle PSR = \frac{1}{2}\angle POR \quad ...(1)$

and Reflex $\angle POR = 2\angle PQR$

$\Rightarrow \quad \angle PQR = \frac{1}{2}$ Reflex $\angle POR \quad ...(2)$

Adding Equation (1) and (2)

$$\angle PSR + \angle PQR = \frac{1}{2}\angle POR + \frac{1}{2} \text{ Reflex } \angle POR$$

$$= \frac{1}{2}[\angle POR + \text{Reflex } \angle POR]$$

$$= \frac{1}{2} \times 360° = 180°$$

$\Rightarrow \quad \angle S + \angle Q = 180°$

50.

AB आणि AC या दोन समान जीवा मानू.

AB=AC=6 सेमी. BC=x+x=2x.

AD⊥BC (AD हा BC ला लंब आहे), त्यामुळे BD=DC.

AD हा लंब दुभाजक आहे आणि केंद्र O, AD वर आहे. OB आणि CD जोडा.

आता BD=DC=x आणि OD=y.

△OBD मध्ये, ∠D=90° (काटकोन)

त्यामुळे पायथागोरस प्रमेयानुसार:

AB2=BD2+AD2

36=x2+(5–y)2 (येथे AD=५−y गृहीत धरले आहे, म्हणजे AO=5 सेमी वर्तुळाची त्रिज्या(______(2)

x2 ची किंमत (1) मधून (2) मध्ये ठेवून:

36=(25–y2)+(25–10y+y2)

36=25–y2+25–10y+y2

36=50–10y

10y=50–36

10y=14

y=1014=57

y ची किंमत (1) मध्ये ठेवून:

25=x2+(57)2

25=x2+2549

x2=25−2549

x2=25625−49

x2=25576

x=25576

x=524

x=4.8 सेमी

BC=2×x=2×4.8=9.6 सेमी

प्रकरण १० हेरॉन्सचे सूत्र (CHAPTER – 10 HERON'S FORMULA)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- सर्व प्रकारच्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी योग्य सूत्रे लागू करणे.
- हिरॉनच्या सूत्राची संकल्पना समजून घेणे.
- क्षेत्रफळ शोधण्यासाठी आणि वास्तविक जीवनातील समस्या सोडवण्यासाठी सूत्राचा वापर करणे.

अध्ययन अंश (Teaching Points):

- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ – हिरॉनच्या सूत्राने.
- सूत्राचा वापर करून समस्या सोडवणे.
- समभूज त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाशी संबंधित समस्या.

कठिनतेची पातळी (LEVEL OF DIFFICULTY)

सोपे (Easy)	मध्यम (Average)	अवघड (Difficult)	एकूण (Total)
7	12	5	24

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा. (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे).

1. हिरॉनच्या सूत्रात, s(s−a)(s−b)(s−c), जर a, b, c या त्रिकोणाच्या बाजू असतील, तर 's' चे मूल्य किती आहे? (सोपे)

A) a+b+c. B) $\frac{a+b+c}{2}$ C) $\frac{a+b+c}{4}$ D) 2a+2b+2c

2. जर एका समद्विभुज त्रिकोणाची एक बाजू 5 सें.मी असेल आणि त्याच्या समान बाजू प्रत्येकी 3 सें.मी असल्यास, त्याची अर्धपरिमिती किती? (सोपे)

A) 11 सें.मी B) 5.5 सें.मी C) 10 सें.मी D) 22 सें.मी

3. एका त्रिकोणाच्या बाजू 8 सें.मी आणि 11 सें.मी आहेत. जर त्रिकोणाची परिमिती 32 सें.मी असेल, तर तिसऱ्या बाजूचे माप किती? (सरासरी)

A) 8 सें.मी B) 11 सें.मी C) 13 सें.मी D) 32 सें.मी

4. जर त्रिकोणाची अर्धपरिमिती 6 सें.मी असेल आणि बाजू 3 सें.मी, 4 सें.मी आणि 5 सें.मी असतील, तर त्याचे क्षेत्रफळ किती आहे? (सरासरी)

A) 6 सें.मी² B) 12 सें.मी² C) 18 सें.मी² D) 24 सें.मी²

5. एका समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 8 सें.मी² आहे. तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती आहे? (सरासरी)

A) 32 सें.मी B) 16 सें.मी C) 48 सें.मी D) 24 सें.मी

6. एक वाहतूक सिग्नल बोर्ड 'a' बाजू असलेल्या समभुज त्रिकोण आकाराचा आहे, तर या वाहतूक सिग्नल बोर्डचे क्षेत्रफळ किती? (सरासरी)

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$

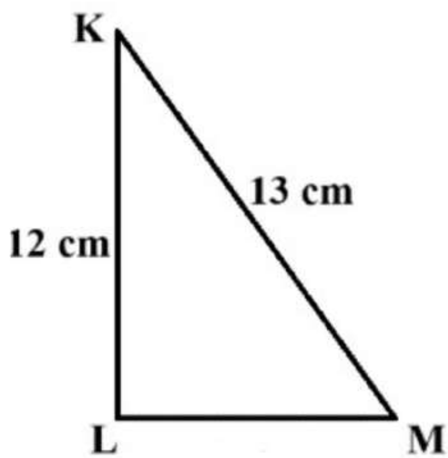
7. एका समांतरभुज चौकोनाच्या बाजू 60 मी आणि 80 मी आहेत आणि सर्वात लांब कर्णाची लांबी 100 मी आहे. तर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती आहे? (सरासरी)

A) 2400 सें.मी² B) 4800 सें.मी²

C) 9600 सें.मी² D) 1200 सें.मी²

8. दिलेल्या त्रिकोणाने किती क्षेत्रफळ व्यापले आहे? (सोपे)

A) 156 सें.मी². B) 78 सें.मी². C) 30 सें.मी² D) 25 सें. मी²



II. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

9. जर a, b, c या त्रिकोणाच्या बाजू असतील, 's' ही अर्धपरिमिती असेल, तर या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधण्याचे सूत्र लिहा. (सोपे)

10. एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू 18 सें.मी, 10 सें.मी आणि 14 सें.मी आहेत. त्याची अर्धपरिमिती शोधा. (सोपे)

11. जर समभुज त्रिकोणाची परिमिती 180 सें.मी असेल, तर त्याच्या बाजूचे माप शोधा. (सोपे)

12. दिलेल्या त्रिकोणाची परिमिती 30 सें.मी आहे, आणि बाजू 1 : 3 : 2 या प्रमाणात असतील, तर सर्वात लहान बाजू शोधा. (सरासरी)

13. जर अर्धपरिमिती 235 सें.मी असेल, a=150 सें.मी, b=120 सें.मी, c=200 सें.मी, तर s(s−a)(s−b)(s−c) चे मूल्य शोधा. (सरासरी)

14. "हिरॉनचे सूत्र सर्व प्रकारच्या त्रिकोणांना लागू होते, जेव्हा त्यांच्या बाजू दिलेल्या असतात", या विधानाचे समर्थन करा. (सोपे)

III. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

15. एका त्रिकोणाच्या बाजू 122 मी, 22 मी आणि 120 मी आहेत, त्याची अर्धपरिमिती 132 मी आहे. तर त्याचे क्षेत्रफळ शोधा. (सरासरी)

16. एका त्रिकोणाच्या बाजू 12 : 17 : 25 या प्रमाणात आहेत आणि परिमिती 540 सें.मी आहे, तर प्रत्येक बाजूचे माप शोधा. (सरासरी)

17. एका समद्विभुज त्रिकोणाची परिमिती 32 सें.मी आहे. समान बाजूंपैकी एका बाजूचे पायाशी असलेले गुणोत्तर 3 : 2 आहे, तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा. (सरासरी)

18. हिरॉनचे सूत्र वापरून, "x" सें. मी बाजू असलेल्या समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा. (सरासरी)

IV. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

19. एक मैदान त्रिकोणाच्या आकाराचे असून त्याच्या बाजू 26 मी, 28 मी आणि 30 मी आहेत. या मैदानाला

₹3 प्रति चौरस मीटर दराने सपाट करण्याचा खर्च किती येईल? (कठीण)

20. एका त्रिकोणी बागेच्या बाजू 120 मी, 80 मी आणि 50 मी आहेत. एका माळ्याला त्याभोवती कुंपण घालायचे आहे आणि आत गवत लावायचे आहे. त्याला किती क्षेत्रात गवत लावावे लागेल? (कठीण)

21. दिलेल्या त्रिकोणाच्या बाजू 35 सें.मी, 54 सें.मी आणि 61सें.मी आहेत. सर्वात लांब शिरोलंबाची लांबी शोधा. (कठीण)

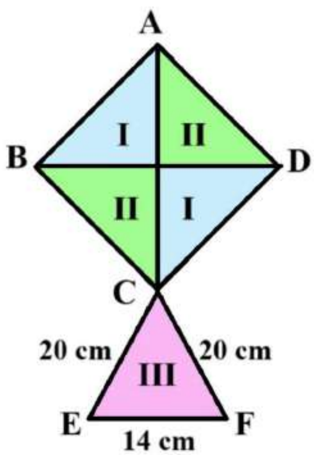
V. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

22. एका त्रिकोणाची बाजू दुप्पट केली असता, क्षेत्रफळात किती टक्के वाढ झाली आहे ते शोधा. (कठीण)

23. एका समभुज चौकोनी आकाराच्या शीटची परिमिती 40 सें.मी असून त्याचा एक कर्ण 12 सें.मी आहे. ही शीट दोन्ही बाजूंनी ₹ 5 प्रति चौरस मीटर दराने रंगवायची आहे.तर रंगवण्याचा खर्च शोधा. (कठीण)

VI. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (पाच गुणांचे प्रश्न)

24. दिलेल्या आकृतीमध्ये, ABCD हा 44 सें.मी कर्ण असलेला चौरस आहे आणि △CEF हा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे. प्रदेश I (हलका निळा), प्रदेश II (हिरवा) आणि प्रदेश III (गुलाबी) चे क्षेत्रफळ शोधा. (कठीण)



प्रकरण १० – हेरॉन्सचे सूत्र (CHAPTER – 10 HERON'S FORMULA)

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. B) $\frac{a+b+c}{2}$

2. B) 5.5 सें. मी (येथे मूळ इंग्रजीमध्ये 11.5cm दिलेले आहे, परंतु 3+3+5 = 11, त्याचा अर्धा 5.5. म्हणून 5.5cm.)

3. C) 13 सें.मी

4. A) 6 सें.मी^{2}

5. A) $\sqrt{32}$ सें.मी

6. B) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

7. B) 4800 सें.मी^{2}

8. C) 30 सें. मी^{2}

II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

9. क्षेत्रफळ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

10. S = $\frac{18+10+14}{2}$ = $\frac{42}{2}$ = 21

11. प्रत्येक बाजू समान असल्यामुळे परिमिती = 3x=180, x=60सें.मी

12. बाजूंची बेरीज = 1x+3x+2x=6x, परिमिती = 30, x=$\frac{30}{6}$=5 सें.मी

13. (s–a)=235–150=85 सें. मी

(s–b)=235–120=115 सें.मी

(s–c)=235–200 =35 सें.मी

(s–a)(s–b)(s–c)=85×115×35=342125 सें.मी

14. हिरॉनचे सूत्र त्रिकोणाच्या प्रकाराची पर्वा न करता त्याच्या बाजूंच्या संदर्भात वापरले जाते.

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Marks Questions)

15. a =122 मी, b = 22 मी, C =120 मी, s =132 मी

क्षेत्रफळ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$

= $\sqrt{132 \times 10 \times 110 \times 12}$

= $\sqrt{(11 \times 12) \times 10 \times (11 \times 10) \times 12}$

= $\sqrt{121 \times 144 \times 100}$

=11×12×10 =1320 चौरस सें.मी

---

16. त्रिकोणाच्या बाजू 12x,17x,25x मानू.

12x+17x+25 x=540

54x=540

x= $\frac{540}{54}$ =10 सें.मी

a=12x=12×10=120 सें.मी

b=17x=17×10=170 सें.मी

c=25x=25×10 =250 सें.मी

---

17. AB=BC=3X आणि AC=2X

परिमिती = 3X+3X+2X=32

8X=32

X= $\frac{32}{8}$ = 4 सें.मी

S= $\frac{a+b+c}{2} = \frac{12+12+8}{2} = \frac{32}{2} = 16$ सें.मी

क्षेत्रफळ $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{16(16-12)(16-12)(16-8)}$

$=\sqrt{16\times4\times4\times8}$

$=\sqrt{4\times4\times4\times4\times4\times2}$

$=4\times4\times2\times\sqrt{2}$

$=32\sqrt{2}\approx32\times1.414=45.25$ सें.मी^{2}

---

18. समभुज त्रिकोणात प्रत्येक बाजू समान असते: a=b=c=x सेमी.

S = $\frac{a+b+c}{2}=\frac{x+x+x}{2}=\frac{3x}{2}$

क्षेत्रफळ (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{\frac{3x}{2}(\frac{3x}{2}-x)(\frac{3x}{2}-x)(\frac{3x}{2}-x)}$

$=\sqrt{\frac{3x}{2}(\frac{x}{2})(\frac{x}{2})(\frac{x}{2})}$

$=\sqrt{\frac{3x^4}{16}}$

क्षेत्रफळ = $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ सेंमी.

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Marks Questions)

19. a=26 मी, b=28 मी, c=30 मी

S= $\frac{26+28+30}{2}=\frac{84}{2}=42$ मी

क्षेत्रफळ (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}$

$=\sqrt{42\times16\times14\times12}$

$=\sqrt{(6\times7)\times16\times(2\times7)\times(2\times6)}$

$=\sqrt{6^2\ \times7^2\times4^2\times2^2}$

$=6\times7\times4\times2$ =336 मी²

मैदान सपाट करण्याचा दर ₹ 3 प्रति चौरस मीटर आहे.

सपाट करण्याचा खर्च = 336×3=₹ 1008

---

20. बागेच्या बाजू a=120 मी, b=80 मी, c=50 मी

s=$\frac{120+80+50}{2}=\frac{250}{2}=125$ मी

क्षेत्रफळ (Area) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{125(125-120)(125-80)(125-50)}$

$=\sqrt{125\times5\times45\times75}$

$=\sqrt{(25\times5)\times5\times(9\times5)\times(25\times3)}$

$=\sqrt{(25)^2\times5^2\times3^2\times3\times5}$

$=25\times5\times3\times\sqrt{15}$

क्षेत्रफळ = $375\sqrt{15}$ मी²

21. a=35 सें.मी, b=54 सेंमी., c=61 सेंमी.

s=$\frac{35+54+61}{2} = \frac{150}{2}$ =75 सेंमी.

क्षेत्रफळ (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

=$\sqrt{75(75-35)(75-54)(75-61)}$

=$\sqrt{75 \times 40 \times 21 \times 14}$

=$\sqrt{(25 \times 3) \times (4 \times 2 \times 5) \times (3 \times 7) \times (2 \times 7)}$

=$\sqrt{25 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7}$

=$\sqrt{5^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 7^2 \times 5}$

क्षेत्रफळ =$5 \times 3 \times 4 \times 7 \times \sqrt{5}$ सेंमी.^{2} = $420\sqrt{5}$ सेंमी.^{2}

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$×पाया×उंची

सर्वात लांब शिरोलंबाची लांबी (उंची) सर्वात लहान बाजूवर असते. सर्वात लहान बाजू a=35 सेमी आहे.

$420\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times 35\times h$

h=$\frac{420\sqrt{5}\times 2}{35}$

शिरोलंबाची लांबी h = $24\sqrt{5}$ सेंमी.

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

22. त्रिकोणाच्या बाजू a,b,c मानू.

S1= s = $\frac{a+b+c}{2}$

A1 = $\sqrt{S1(S1-a)(S1-b)(S1-c)}$

जेव्हा बाजू दुप्पट केल्या जातात: 2a,2b,2c

$S2 = \frac{2a+2b+2c}{2} = \frac{2(a+b+c)}{2} = 2S1$

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Marks Questions)

22. (चालू)

$A2=\sqrt{S2(S2-2a)(S2-2b)(S2-2c)}$

वरील समीकरणात S2=2S1 ठेवून,

$A2=\sqrt{2S1(2S1-2a)(2S1-2b)(2S1-2C)}$

$A2=\sqrt{2S1\times 2(S1-a)\times 2(S1-b)\times 2(S1-c)}$

$A2=\sqrt{16S1(S1-a)(S1-b)(S1-c)}$

$A2=4\sqrt{S1(S1-a)(S1-b)(S1-c)}$

A2=4A1=4×मूळ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ.

म्हणून, क्षेत्रफळात वाढीची टक्केवारी = $\frac{\text{क्षेत्रफळात वाढ}}{\text{मूळ क्षेत्रफळ}}$ ×100

$=\frac{A2-A1}{A1}\times 100 = (\frac{A2}{A1}-1)\times 100$

= (4-1) x 100

क्षेत्रफळात वाढीची टक्केवारी = 300 %

---

23. ABCD हा समभुज चौकोन मानू, AB=BC=CD=DA=X.

परिमिती P=40 सेमी,

4x=40, x=10 सेमी.

म्हणून AB=BC=CD=DA=10 सेंमी.

△ABC मध्ये (येथे कर्ण 12 सेमी हा AC आहे असे गृहीत धरले आहे),

$s=\frac{10+10+12}{2} = \frac{32}{2} = 16$ सेंमी.

क्षेत्रफळ (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

=$\sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)}$

=$\sqrt{16\times 6\times 6\times 4}$

=$\sqrt{4^2\times 6^2\times 2^2}$

=4x6x2= 42 सेंमी. ².

समभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ = 2×△ABC चे क्षेत्रफळ =2x48=96 सेंमी. ².

शीट दोन्ही बाजूंनी रंगवायची आहे, त्यामुळे एकूण रंगवण्याचे क्षेत्र =2x96=192 सेंमी. ².

(टीप: दर प्रति m^2 मध्ये दिला आहे, तर क्षेत्रफळ cm^2 मध्ये आहे. $1m^2=10000cm^2$. त्यामुळे $192cm^2=192/10000m^2=0.0192m^2$.)

रंगवण्याचा दर ₹ 5 प्रति m^2 आहे.

रंगवण्याचा खर्च = 5×0.0192=₹ 0.096

(मूळ उत्तर 960 रुपये हे चुकीचे आहे, कारण युनिट रूपांतरण विचारात घेतलेले नाही. जर दर प्रति cm^2 असेल तर 960 रुपये योग्य ठरते. परंतु, दर 'per m^2' दिलेला आहे.)

जर दर ₹ 5 प्रति cm^2 असेल, तर खर्च =5×96×2=₹ 960

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Marks Questions)

24. ABCD हा चौरस आहे ज्याचा कर्ण 44 सेंमी. आहे.

चौरसाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात आणि काटकोनात छेदतात.

चौरसाच्या कर्णाचा गुणधर्म: कर्ण =2×(बाजू)

(44)=2×(बाजू)

(बाजू) =AO=BO=CO=DO=$\frac{44}{2}$=22 सेंमी. .

△AOB मध्ये, $AB^2=AO^2+BO^2=(22)^2+(22)^2$= 484+484=484×2

AB = $\sqrt{484\times 2}$ = $22\sqrt{2}$ सेंमी.

चौरसाचे क्षेत्रफळ =(बाजू)^2=$(22\sqrt{2})^2$ = 968 सेंमी.^{2}

प्रत्येक त्रिकोणाचे (जसे की △AOB) क्षेत्रफळ = $\frac{\text{चौरसाचे क्षेत्रफळ}}{4}$= $\frac{968}{4}$ = 242 चौरस सेंमी.

प्रदेश I (हलका निळा) = 2 × (त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ) (जर प्रदेश I हा △AOB आणि △COD चा समावेश करत असेल, किंवा दोन सारख्या त्रिकोणांचा)

येथे, प्रदेश I हा △AOB + △COD असे गृहीत धरल्यास (चित्रानुसार)

प्रदेश I चे क्षेत्रफळ = 2 $\times 242 = 484$ चौरस सेंमी. .

प्रदेश II (हिरवा) = 2 × (त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ) (जर प्रदेश II हा △AOD आणि △BOC चा समावेश करत असेल)

प्रदेश II चे क्षेत्रफळ = 2 x 242 = 484 चौरस सेंमी.

प्रदेश III (गुलाबी): हा △CEF आहे. हा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे.

(आकृतीशिवाय, C, E, F बिंदूंची अचूक स्थिती आणि बाजूंची लांबी स्पष्ट नाही. दिलेल्या उत्तरात बाजू a=20,b=20,c=14 मानल्या आहेत.)

जर बाजू a=20 सेंमी. , b=20 सेंमी. , c=14 सेंमी. असतील,

S = $\frac{a+b+c}{2}$ = $\frac{20+20+14}{2}$ = $\frac{54}{2}$ = 27 सेंमी. .

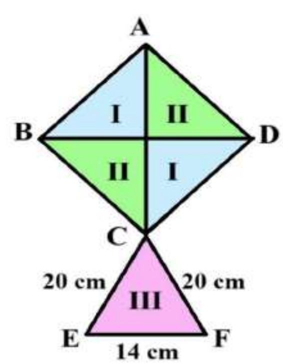
क्षेत्रफळ (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

=$\sqrt{27(27-20)(27-20)(27-14)}$

=$\sqrt{27 \times 7 \times 7 \times 13}$

=$\sqrt{(9 \times 3) \times 7^2 \times 13}$

= 3 x 7 $\sqrt{39}$



=21$\sqrt{39}$ ≈ 21×6.245 ≈ 131.14 सेंमी. ^{2} (हे दिलेले उत्तर जुळते)

प्रकरण – 11
पृष्ठफळ आणि घनफळ
(AREA AND VOLUME)

अध्ययन निष्पत्ती (Learning Outcomes):

- शंकूच्या पृष्ठफळ आणि घनफळाचे सूत्र मिळवणे आणि त्यांचा आजूबाजूच्या वस्तूंना वापर करणे.
- गोलाचे, अर्धगोलाचे पृष्ठफळ आणि घनफळाचे सूत्र मिळवणे आणि त्यांचा आजूबाजूच्या वस्तूंना वापर करणे

अध्ययन अंश:

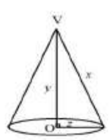
- लंबवर्तुळाकार शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ आणि एकूण पृष्ठफळ
- गोलाचे पृष्ठफळ
- अर्धगोलाचे पार्श्व पृष्ठभाग आणि एकूण पृष्ठफळ
- लंबवर्तुळाकार शंकूचे घनफळ
- गोलाचे घनफळ
- अर्धगोलाचे घनफळ

I. पुढील प्रत्येक प्रश्नासाठी/अपूर्ण विधानासाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर लिहून संपूर्ण उत्तर लिहा (प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

1.'r' त्रिज्या आणि 'l' तिरकस उंची असलेल्या शंकूच्या वक्र पृष्ठफळ काढण्यासाठी वापरले जाणारे सूत्र चौरस एककात आहे. (सोपे)

(A) πrl (B) $2\pi r(r+l)$ (C) $2\pi(r+l)$ (D) $2\pi rl$

2. दिलेल्या आकृतीत, शिरोबिंदू 'v' आणि वर्तुळाकार तळाचे केंद्र 'O' असलेला एका लंबवर्तुळाकार शंकू दिला आहे. x^2, y^2 आणि z^2 यांच्यातील योग्य संबंध हा आहे. (सोपे)



(A) $y^2 = z^2 – x^2$ (B) $y^2 = x^2 – z^2$ (C) $y^2 = x^2 + z^2$ (D) $y^2 = 2x^2 + z^2$

3.एका लंबवर्तुळाकार शंकूच्या तळाची त्रिज्या 7 से.मी. आहे. जर त्याची तिरकस उंची 14 से.मी. असेल, तर त्याचे वक्रपृष्ठफळ हे आहे (सोपे)

(A) 108 चौ.से.मी. (B) 308 चौ.से.मी. (C) 402 चौ.से.मी. (D) 462 चौ.से.मी.

4.एका शंकूची उंची 16 सेमी आणि तळाची त्रिज्या 12 सेमी आहे. त्याची तिरकस उंची ही आहे. (सोपे)

(A) 8 से.मी. (B) 10 से.मी. (C) 15 से.मी. (D) 20 से.मी.

5. 7 से.मी. त्रिज्येच्या धातूच्या गोलाचे पृष्ठफळ हे आहे. (सोपे)

(A) 308 चौ.से.मी. (B) 462 चौ.से.मी. (C) 512 चौ.से.मी. (D) 616 चौ.से.मी.

6.एका शंकूचे वक्रपृष्ठफळ 308 चौ. से.मी. आहे आणि त्याची तिरकस उंची 14 से.मी. आहे. त्याच्या तळाची त्रिज्या इतकी आहे. (मध्यम)

(A) 7 से.मी. (B) 8 से.मी. (C) 9 से.मी. (D) 12 से.मी .

7.एक शंकूच्या आकाराचा तंबू 10 मीटर उंच आहे आणि त्याच्या तळाची त्रिज्या 24 मीटर आहे. तंबूची तिरकस उंची इतकी आहे

(सोपे)

(A) 25 मी (B) 26 मी (C) 27 मी (D) 28 मी

8.एका जोकरची टोपी शंकूच्या स्वरूपात आहे. तळाची त्रिज्या 7 से.मी. आणि उंची 24 से.मी. आहे अशा 10 टोप्या बनवण्यासाठी लागणाऱ्या शीटचे क्षेत्रफळ इतके आहे (मध्यम)

(A) 3500 चौ.से.मी. (B) 5500 चौ.से.मी. (C) 6500 चौ.से.मी. (D) 8500 चौ.से.मी.

9. दोन शंकूचा व्यास समान आहे. जर त्यांच्या तिरकस उंचीचे गुणोत्तर 5 : 4 असेल, तर त्यांच्या वक्रफळांचे गुणोत्तर इतके आहे. (मध्यम)

(A) 4 : 5 (B) 5 : 4 (C) 16 : 25 (D) 25 : 16

10. 'r' त्रिज्या, 'h' उंची आणि 'l' तिरकस उंची असलेल्या भरीव शंकूचे एकूण पृष्ठफळ हे आहे. (सोपे)

(A) π rl चौ.से.मी. (B) πr(r+l) चौ.से.मी. (C) 2π(r+l) चौ.से.मी. (D) 2πrl चौ.से.मी.

11. 'r' त्रिज्येच्या गोलाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी वापरले जाणारे सूत्र हे आहे. (सोपे)

(A) $2\pi r^2$ (B) πr^2 (C) $3\pi r^2$ (D) $4\pi r^2$

12. जर गोलाची त्रिज्या 7 से.मी. असेल, तर त्याचे पृष्ठफळ हेआहे. (सोपे)

(A) 154 चौ.से.मी. (B) 308 चौ.से.मी. (C) 616 चौ.से.मी. (D) 1232 चौ.से.मी.

13.जर गोलाचे पृष्ठफळ 1386 चौ.से.मी. असेल, तर त्याची त्रिज्या इतकी आहे. (π = 22/7 वापरा) (मध्यम)

(A) 7 से.मी. (B) 10.5 से.मी. (C) 14 से.मी. (D) 21 से.मी.

14. जर गोलाची त्रिज्या दुप्पट केली, तर त्याचे पृष्ठफळ किती पट वाढते? (मध्यम)

(A) 2 पट (B) 3 पट (C) 4 पट (D) 8 पट

15. 'r' त्रिज्येच्या गोलाचे पृष्ठफळ आणि 'r' त्रिज्येच्या अर्धगोलाचे पृष्ठफळ यांचे गुणोत्तर हे आहे. (मध्यम)

(A) 1 : 1 (B) 2 : 1 (C) 2 : 3 (D) 3 : 2

16.एक भरीव गोल दोन अर्धगोलांमध्ये कापला जातो. एका अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ हे आहे (सोपे)

(A) $2\pi r^2$ चौ.से.मी. (B) πr^2 चौ.से.मी. (C) $3\pi r^2$ चौ.से.मी. (D) $4\pi r^2$ चौ.से.मी.

17. जर समान त्रिज्येचे दोन भरीव अर्धगोल त्यांच्या तळांवर एकत्र जोडले गेले, तर या नवीन भरीव वस्तूचे पृष्ठफळ हे आहे (सोपे)

(A) $3\pi r^2$ चौ.से.मी. (B) $4\pi r^2$ चौ.से.मी. (C) $5\pi r^2$ चौ.से.मी. (D) $6\pi r^2$ चौ.से.मी.

18. एका गोलाचे पृष्ठफळ 'S' आहे. जर त्याची त्रिज्या दुप्पट केली, तर त्याचे नवीन पृष्ठफळ हे असेल (सोपे)

(A) 2S (B) 4S (C) 8S (D) S^2

19. दोन गोलांच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर 2:3 आहे. त्यांच्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर हे आहे (मध्यम)

(A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 8 : 27 (D) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

20. 346.5 चौ.से.मी. पृष्ठफळ असलेल्या गोलाचा व्यास हा आहे (मध्यम)

(A) 5.25 से.मी. (B) 5.75 से.मी. (C) 10.5 से.मी. (D) 11.5 से.मी.

21 एका गोलाकार फुग्यात हवा भरली असता त्याची त्रिज्या 7 से.मी. पासून 14 से.मी. इतकी होते. मूळ फुग्याचे पृष्ठफळ फुगवलेल्या फुग्याच्या पृष्ठफळाशी गुणोत्तर हे आहे (मध्यम)

(A) 1 : 2 (B) 1 : 3 (C) 1 : 4 (D) 4 : 3

22. एका अर्धगोलाकार भांड्याची त्रिज्या 10.5 से.मी. आहे. त्यात किती लिटर दूध मावेल? (मध्यम)

(A) 2.47 लिटर (B) 2.476 लिटर (C) 2.376 लिटर (D) 3.476 लिटर

23. जर एका गोलाचे पृष्ठफळ 676π चौ.से.मी. असेल, तर त्याची त्रिज्या ही आहे (मध्यम)

(A) 8 से.मी. (B) 9 से.मी. (C) 12 से.मी. (D) 13 से.मी.

24.एका गोलाची त्रिज्या 10 से.मी. आहे. जर त्याची त्रिज्या 1 से.मी.ने वाढवली, तर गोलाच्या घनफळात किती वाढ होईल? (मध्यम)

(A) 13.3 % (B) 21.1 % (C) 30 % (D) 33.1 %

25. शंकूच्या आकाराच्या तंबूचे घनफळ 462 घन मी. आहे आणि तळाचे क्षेत्रफळ 154 चौ.से.मी. आहे. शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची ही आहे (मध्यम)

(A) 9 मी (B) 1 से.मी. (C) 15 मी. (D) 24 मी.

26.जर एका गोलाची त्रिज्या 2r, असेल, तर त्याचे घनफळ हे असेल. (सोपे)

(A) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (B) $4\pi r3$ (C) $\frac{8}{3}\pi r^3$ (D) $\frac{32}{3}\pi r^3$

27. जर अर्धगोलाची त्रिज्या 5 से.मी. असेल, तर त्याचे घनफळ घन से.मी. मध्ये आहे (मध्यम)

(A) $\frac{250}{3}\pi$ (B) $\frac{500}{3}\pi$ (C) 75π (D) $\frac{125}{3}\pi$

28. 7 सेमी त्रिज्येचा एक भरीव धातूचा गोल मध्यभागी दोन समान भागांमध्ये कापला जातो. प्रत्येक भागाचे एकूण पृष्ठफळ हे आहे (मध्यम)

(A) 231 चौ.से.मी. (B) 308 चौ.से.मी. (C) 462 चौ.से.मी. (D) 924 चौ.से.मी.

29.एका अर्धगोलाकार फुग्यात हवा भरल्यावर त्याची त्रिज्या 6 से.मी. वरून 12 से.मी. होते. दोन्ही स्थितींमधील फुग्याच्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर हे आहे. (मध्यम)

(A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 2 : 3 (D) 2 : 1

30.जर एका गोलाचे घनफळ आणि पृष्ठफळ संख्यात्मकदृष्ट्या समान असेल, तर त्याची त्रिज्या ही आहे. (मध्यम)

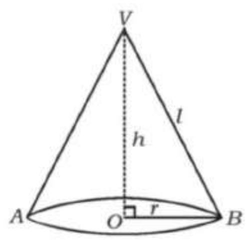
(A) 2 एकके (B) 3 एकके (C) 4 एकके (D) 5 एकके

31.एका अर्धगोलाचे घनफळ 18π घन से.मी. आहे. त्याची त्रिज्या ही आहे. (मध्यम)

(A) 2 से.मी. (B) 3 से.मी. (C) 2.6 से.मी. (D) 4 से.मी.

II. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या (एक गुणांचे प्रश्न)

32. दिलेल्या भरीव आकृतीचे एकूण पृष्ठफळ काढण्याचे सूत्र लिहा. (सोपे)



33. 28 से.मी. उंची आणि 21 से.मी. तळाची त्रिज्या असलेल्या लंबवर्तुळाकार शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ शोधा. (सोपे)

34.ज्याची तिरकस उंची 10 से.मी. आणि तळाची त्रिज्या 21 से.मी. आहे अशा लंबवर्तुळाकार शंकूचे वक्रपृष्ठफळ शोधा. (सोपे)

35. 'r' एकक त्रिज्येच्या अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ काढण्यासाठी सूत्र लिहा. (सोपे)

36. 'r' त्रिज्येच्या अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ काढण्याचे सूत्र लिहा. (सोपे)

37.21 से.मी. त्रिज्येच्या गोलाचे वक्र पृष्ठफळ शोधा. (सोपे)

38. 7 सेमी त्रिज्येच्या गोलाचे पृष्ठफळ शोधा. (सोपे)

39. 14 सेमी व्यासाच्या अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ शोधा. (सोपे)

40. एका लंबवर्तुळाकार शंकूच्या वर्तुळाकार तळाची परिमिती 22 से.मी. आहे आणि त्याची तिरकस उंची 10 से.मी. आहे. शंकूचे वक्र फळ शोधा. (सोपे)

41.'r' त्रिज्येच्या गोलाचे घनफळ काढण्याचे सूत्र लिहा. (सोपे)

42.एका गोलाचे घनफळ आणि पृष्ठफळ संख्यात्मकदृष्ट्या समान आहे. त्याची त्रिज्या शोधा. (मध्यम)

43 . समान त्रिज्येच्या एका गोलाच्या आणि एका अर्धगोलाच्या एकूण पृष्ठभागाचे गुणोत्तर काय आहे? (मध्यम)

III. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (दोन गुणांचे प्रश्न)

44.एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या आणि तिरकस उंची अनुक्रमे 4 से.मी. आणि 5 से.मी. आहे. शंकूची उंची शोधा. (मध्यम)

45.एका गोलाचे पृष्ठफळ 100π चौ. से.मी. आहे. त्याची त्रिज्या शोधा. (मध्यम)

46. 28 से.मी. उंची आणि 21 से.मी. तळाची त्रिज्या असलेल्या लंबवर्तुळाकार शंकूचे पार्श्व पृष्ठफळ शोधा. (मध्यम)

47. 8 मीटर उंच शंकूच्या आकाराच्या तंबूच्या तळाचा परीघ 788 चौ. मीटर आहे. तंबू बनवण्यासाठी लागणाऱ्या कॅनव्हासचे क्षेत्रफळ शोधा. (कठीण)

48. एका शंकूच्या तळाचा व्यास 10.5 से.मी. आणि त्याची तिरकस उंची 10 से.मी. आहे. त्याचे वक्रपृष्ठफळ शोधा. (मध्यम)

49. जर एका शंकूची तिरकस उंची 21 मी आणि त्याच्या तळाचा व्यास 24 मी असेल, तर त्याचे एकूण पृष्ठफळ शोधा. (मध्यम)

50. 14 से.मी. व्यासाच्या गोलाचे पृष्ठफळ शोधा. (मध्यम)

51. एका लंबवर्तुळाकार शंकूचे वक्र पृष्ठफळ 550 चौ. से.मी. आहे. जर त्याची तिरकस उंची 25 से.मी. असेल, तर शंकूच्या तळाची त्रिज्या शोधा. (मध्यम)

52.एका शंकूच्या आकाराच्या तंबूच्या तळाचे क्षेत्रफळ 154 चौ.मी आहे. जर त्याचे घनफळ 1232 घनमी असेल, तर शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची शोधा. (कठीण)

53.एका शंकूच्या आकाराच्या तंबूच्या तळाची त्रिज्या 7 मी आणि त्याची उंची 24 मी आहे. शंकूच्या आकाराचा तंबू बनवण्यासाठी 5 मी रुंद किती मीटर कापड लागेल ते शोधा. (π = 722 घ्या) (कठीण)

54. 6से.मी. त्रिज्या आणि 7 से.मी. उंची असलेल्या लंबवर्तुळाकार शंकूचे घनफळ शोधा. (मध्यम)

55. दोन शंकूंच्या घनफळांचे गुणोत्तर 4:5 आहे. जर त्यांच्या तळांच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर 2:3 असेल, तर त्यांच्या उभ्या उंचीचे गुणोत्तर शोधा. (कठीण)

56.एका अर्धगोलाकार घुमटाच्या तळाचा परीघ 17.6 मी आहे. त्याच्या वक्रपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ शोधा. (मध्यम)

57.एका धातूच्या बॉलचे पृष्ठफळ 154 चौ.से.मी. आहे. त्याची त्रिज्या शोधा. (मध्यम)

58.एका फुटबॉलचे पृष्ठफळ 100π चौ.से.मी. आहे. त्यातील हवेचे घनफळ शोधा. (कठीण)

59.एका अर्धगोलाकार टाकीची आतील त्रिज्या 2.8 मी आहे. तिची लिटरमध्ये क्षमता शोधा. (कठीण)

60.दोन गोलांच्या घनफळांचे गुणोत्तर 64:27 आहे. त्यांच्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर शोधा. (कठीण)

61.एका गोलाचे पृष्ठफळ 144π चौ.मी आहे. त्याचे घनफळ शोधा. (कठीण)

62.एका भरीव अर्धगोलाकार खेळण्यांचे वक्रपृष्ठफळ 1232 चौ.से.मी. आहे. त्याची त्रिज्या शोधा. (कठीण)

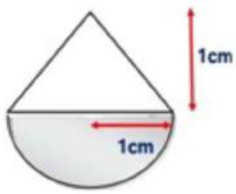
IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (तीन गुणांचे प्रश्न)

63.एका शंकूची उंची 16 से.मी. आणि त्याच्या तळाची त्रिज्या 12 से.मी. आहे. शंकूचे वक्र पृष्ठफळ आणि एकूण पृष्ठफळ शोधा. (π = 3.14 वापरा) (कठीण)

64.9 से.मी. कडा असलेल्या घनामधून कापून काढता येणाऱ्या सर्वात मोठ्या लंबवर्तुळाकार शंकूचे घनफळ शोधा. [कापण्याच्या प्रक्रियेतील वाया गेलेल्या भागाकडे दुर्लक्ष करा] (कठीण)

65.एका लंबवर्तुळाकार शंकूची त्रिज्या आणि उंचीचे गुणोत्तर 3 : 4 आहे. जर शंकूचे घनफळ 30. 1.44 घन से.मी. असेल, तर त्याची तिरकस उंची शोधा. (π = 3.14 घ्या) (कठीण)

66.एका लंबवर्तुळाकार शंकूची उंची 16 से.मी. आणि त्याचा व्यास 24 से.मी. आहे. वक्रपृष्ठफळाचे एकूण पृष्ठफळाशी गुणोत्तर शोधा. (कठीण)
67.पितळेच्या बनवलेल्या एका अर्धगोलाकार भांड्याचा आतील व्यास 10.5 से.मी. आहे. त्याच्या आतील बाजूला कल्हई (कथिलाचा मुलामा) करण्यासाठी रु. 16 दर 100 चौ. से.मी. या दराने शोधा.
(कठीण)
68.एका दुकानदाराकडे 5 से.मी. त्रिज्येचा एक गोलाकार लाडू आहे. तेवढ्याच सामग्रीतून 2.5 से.मी. त्रिज्येचे किती लाडू बनवता येतील? (कठीण)
69.एका शंकूच्या आकाराच्या तंबूत 11 लोकांना राहण्याची सोय करायची आहे. प्रत्येक व्यक्तीला जमिनीवर 4 चौ.मी. जागा आणि श्वास घेण्यासाठी 20 घन मीटर हवा मिळणे आवश्यक आहे. शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची शोधा. (कठीण)
70.एक भरीव वस्तू एका अर्धगोलावर उभ्या असलेल्या शंकूच्या आकारात आहे, ज्यांची दोन्ही त्रिज्या 1 से.मी. आहेत आणि शंकूची उंची त्याच्या त्रिज्ये एवढी आहे. त्या भरीव वस्तूचे घनफळ π च्या स्वरूपात शोधा. (कठीण)



V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या: (चार गुणांचे प्रश्न)

71.गव्हाचा एक ढिगारा शंकूच्या आकारात आहे, ज्याचा व्यास 10.5 मी. आणि उंची 3 मी. आहे. त्याचे घनफळ काढा. पावसापासून संरक्षण करण्यासाठी ढिगाऱ्याला ताडपत्रीने झाकले आहे. त्यासाठी लागणाऱ्या ताडपत्रीचे क्षेत्रफळ शोधा. (कठीण)
72.एका मक्याच्या कणसाचा (आकृती पहा) आकार काहीसा शंकूसारखा आहे, त्याच्या सर्वात मोठ्या भागाची त्रिज्या 2.1 से.मी. आणि लांबी (उंची) 20 से.मी. आहे. जर कणसाच्या 1 चौ से.मी.जागेत चार दाणे असतील, तर पूर्ण कणसामध्ये किती दाणे आहेत ते काढा. (कठीण)



73.एका गोलाचा व्यास 25% ने कमी केला जातो. त्याचे वक्रपृष्ठफळ किती टक्क्यांनी कमी होईल ते शोधा? (कठीण)
74.त्रिज्या 'r' आणि पृष्ठफळ 'S' असलेले लोखंडाचे 27 भरीव गोले वितळवून पृष्ठफळ 'S^1'' असलेला एक नवीन गोल बनवला जातो. तर खालील किमती काढा.

(1) नवीन गोलाची त्रिज्या 'R' (2) 'S' आणि ' S^1'' चे गुण

धडा-11 पृष्ठफळ आणि घनफळ

I. बहुपर्यायी प्रश्न

1. (A) π rl चौ. एकके
2. (B) $y^2 = x^2 - z^2$
3. (B) 308 चौ. से.मी.
4. (D) 20 से.मी.
5. (D) 616 चौ.से.मी.
6. (A) 7 से.मी.
7. (B) 26 मी.
8. (B) 5500 चौ.से.मी.
9. (B) 5 : 4
10. (B) $\pi r(r+l)$
11. (D) $4 \pi r^2$
12. (C) 616 चौ.से.मी.
13. (C) 10.5 से.मी.
14. (C) 4 पट
15. (B) 2:1
16. (C) $3 \pi r^2$
17. (B) $4 \pi r^2$
18. (B) 4S
19. (B) 4:9
20. (C) 10.5 से.मी.
21. (C) 1:4
22. (B) 2.476
23. (D) 13 से.मी.
24. (D) 33.1%
25. (A) 9 मी
26. (D) $\frac{32}{3}\pi r3$
27. (A) $\frac{250}{3}\pi r3$
28. (C) 462चौ. से.मी.
29. (A) 1:4
30. (B) 3 एकके
31. (B) 3 से.मी.

II. एक गुणांचे प्रश्न

32. एकूण पृष्ठफळ = $\pi r(r+l)$ चौ. एकके
33. तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{784 + 441} = \sqrt{1225} = 35$ से.मी.
34. वक्रपृष्ठफळ (A) = $\pi rl = \frac{22}{7}$ x 10 x 21 = 660 चौ. से.मी.

35. अर्धगोलाचे वक्र पृष्ठफळ (A) = $2\pi r^2$

36. अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ (A) = $3\pi r^2$

37. गोलाचे वक्र पृष्ठफळ (A) = $2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 2772$ चौ.से.मी.

38. गोलाचे पृष्ठफळ (A) = $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616$ चौ.से.मी.

39. व्यास (d) = 14 से.मी. $\Rightarrow$ त्रिज्या (r) = 7 सेमी

अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ (A) = $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462$ चौ.से.मी.

40. वर्तुळाकार तळाची परिमिती = $2\pi r$ = 22 से.मी. $\Rightarrow \pi r$ = 11 सेमी, तिरकस उंची (l) = 10 सेमी

शंकूचे वक्रपृष्ठफळ (A) = $\pi rl = 11 (10) = 110$ चौ.से.मी.

41.गोलाचे घनफळ (V) = $\frac{4}{3}\pi r^3$

42. गोलाचे घनफळ = गोलाचे पृष्ठफळ

$\frac{4}{3}\pi r^2 = 4\pi r^2$

r = 3 एकके

43.गोलाच्या एकूण पृष्ठफळचे अर्धगोलाच्या एकूण पृष्ठफळाशी गुणोत्तर = $\frac{\frac{4}{3}\pi r3}{\frac{2}{3}\pi r3} = \frac{2}{3}$ = **2 : 1**

44. **उंची** (h) = $\sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$ =3 से.मी.

45.गोलाचे पृष्ठफळ = 100π चौ.से.मी.

$4\pi r^2 = 100\pi$

$r^2 = \frac{100\pi}{4\pi}$

$r^2 = 25$

r = 5 से.मी.

III. दोन गुणांचे प्रश्न

46.तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{784 + 441} = \sqrt{1225}$ = 35 से.मी.

क्षेत्रफळ (A) = $\pi rl = \frac{22}{7} \times 21 \times 35 = 2310$

47. $2\pi r = \frac{44}{7} \Rightarrow r = 1$ मी

तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$ से.मी.

कॅनव्हाससाठी आवश्यक क्षेत्रफळ = $\pi rl = \pi \times 1 \times 65 = 65\pi$ चौ.से.मी.

48. व्यास (d) = 10.5 से.मी. $\Rightarrow$ त्रिज्या (r) = 5.25 से.मी.

क्षेत्रफळ (A) = $\pi rl = \frac{22}{7} \times 5.25 \times 10 = 165$ चौ. से.मी.

49.त्रिज्या (r) = 24 मी, तिरकस उंची (l) = 21 मी.

क्षेत्रफळ (A) = $\pi r(r+l) = \frac{22}{7} \times 24(24+21) = 722 \times 24 \times 45 = 3394.28$ चौ.से.मी.

50. व्यास (d) = 14 सेमी $\Rightarrow$ त्रिज्या (r) = 7 सेमी

क्षेत्रफळ (A) = $4\pi r2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616$ चौ.से.मी.

51.दिलेले: वक्र पृष्ठफळ (CSA) = 550 चौ. से.मी. तिरकस उंची (l) = 25 से.मी.

CSA = $\pi rl \Rightarrow 550 = \frac{22}{7} \times r \times 25 \Rightarrow r = 7$ से.मी.

शंकूच्या तळाची त्रिज्या 7 से.मी. आहे.

52.दिलेले: तळाचे क्षेत्रफळ, πr^2 = 154 चौ.से.मी. आणि घनफळ = 1232 घन मी.

शंकूच्या आकाराच्या तंबूचे घनफळ = 1232 घन मी.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h=1232$$

$$\frac{1}{3}(154)h=1232$$

$$h = 24 \text{ मी.}$$

शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची 24 मी. आहे.

53. दिलेले: त्रिज्या (r) = 7 मी, उंची (h) = 24 मी

तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{24^2+7^2} = \sqrt{576+49} = \sqrt{625}$ = 25 मी

वक्रपृष्ठफळ (CSA) = $\pi rl = \frac{22}{7}$x 7 x 25 = 550 चौ.मी.

कापडाचे क्षेत्रफळ = लांबी x रुंदी

550=लांबी×5

लांबी= $\frac{550}{5}$

लांबी = 110 मी.

तंबू बनवण्यासाठी 110 मीटर कापड लागेल.

54. घनफळ (V) = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 6^2\times 7 = \frac{1}{3}\times 22\times 36 = 22\times 12 = 264$ चौ.से.मी.

55. दोन शंकूंच्या घनफळांचे दिलेले गुणोत्तर 4:5 आहे. ⇒ $v_{1:}\ v_2 = 4:5$ किंवा $\frac{v1}{v2} = \frac{4}{5}$

त्यांच्या तळांच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर 2:3 आहे. ⇒$r_1:r_2=2:3$ किंवा $\frac{r1}{r2} = \frac{2}{3}$

लंब उंचीचे गुणोत्तर $h_1:h_2$ = ?

$$\frac{v1}{v2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r}{\frac{1}{3}\pi r3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{22\ h1}{22\ h2}$$

$$\frac{h1}{h2} = \frac{9}{5}$$

त्यांच्या उभ्या उंचीचे गुणोत्तर 9 : 5 आहे.

56. दिलेला : तळाचा परीघ = 17.6 से.मी.

$2\pi r=17.6 \Rightarrow r = 2.8$ से.मी.

वक्रपृष्ठफळ (CSA) = $2\pi r^2 = 2\times\frac{22}{7}\times(2.8)^2$

वक्रपृष्ठफळ = 49.28 चौ.से.मी.

57. दिलेले, धातूच्या बॉलचे पृष्ठफळ = 154 चौ.से.मी.

$$4\pi r^2 = 154$$

$$r^2=\frac{154 \text{ x } 7}{4 \text{ x } 22} = \frac{49}{4}$$

$r = \frac{7}{2}$

$r =$ 3.5 से.मी.

58. फुटबॉलचे पृष्ठफळ = 100π चौ.से.मी.

$4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ से.मी.

फुटबॉलमधील हवेचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5^3$

= 523.8 घन मी. (अंदाजे)

59. त्रिज्या (r) = 2.8 मी

अर्धगोलाकार टाकीचे घनफळ $= 2/3\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.8)^3$

= 45.99 घन मी. (अंदाजे)

1 घन मी = 1000 लिटर

V = 45.99×1000 लिटर

= 45,990 लिटर (अंदाजे)

60. गोलाचे घनफळ 2 / गोलाचे घनफळ = 64 / 27

$\frac{4}{3}\pi r^3 \;/\; \frac{4}{3}\pi r^3 = 64 / 27$

$r^3 / r^3 = 64/27$

$r_1 / r_2 = 4/3$

गोलाचे पृष्ठफळ 1/गोलाचे पृष्ठफळ 2

$4\pi r^2 / 4\pi r^2$

$4^2 / 3^2$

16 / 9

त्यांच्या पृष्ठफळांचे गुणोत्तर = 16 : 9

61. गोलाचे पृष्ठफळ = 144π चौ.मी.

$4\pi r^2 = 144\pi$

$r^2 = 36$

$r = 6$ मी.

गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 6^3$

= 905.14 घन मी. (अंदाजे)

62. भरीव अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ (CSA) = 1232चौ. से.मी.

$2\pi r^2=1232$

$2 x \frac{22}{7} x\ r^2=1232$

$r^2=\frac{1232\ x\ 7}{2x22}$

$r^2=196$

r = 14 से.मी.

IV. तीन गुणांचे प्रश्न

63. तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2+r^2}$ = $\sqrt{16^2+12^2}$ = $\sqrt{256+144}$ = $\sqrt{400}$ = 20 से.मी.

पार्श्व पृष्ठफळ (LSA) = πrl = 3.14×12×20 = 753.6 चौ.से.मी.

एकूण पृष्ठफळ (TSA) = $\pi r(r+l)$ = 3.14×12(12+20) = 3.14×12×32 = 1205.76 चौ.से.मी.

64. शंकूच्या तळाचा व्यास = 9 से.मी ⇒ त्रिज्या (r) = $\frac{9}{2}$ से.मी. उंची (h) = 9 से.मी.

घनफळ (V) = $\frac{1}{3}\pi r^2h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(\frac{9}{2})^2\times9$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{81}{4}\times9$

= 190.9 घन से.मी. (अंदाजे)

9 से.मी. कडा असलेल्या घनामधून कापून काढता येणाऱ्या सर्वात मोठ्या लंबवर्तुळाकार शंकूचे घनफळ 190.9 घन से.मी. आहे.

65. दिलेले शंकूची त्रिज्या आणि उंचीचे गुणोत्तर 3 : 4 आहे. ⇒r:h=3:4

समजा r=3p आणि h=4p

शंकूचे घनफळ = 301.44 घन से.मी.

$\frac{1}{3}\pi r^2h$ =301.44

$\frac{1}{3}\times3.14\times(3p)^2\times4p$ = 301.4

$\frac{1}{3}\times3.14\times9p^2\times4p$ =301.44

3.14×3×4p3=301.44

37.68p3=301.44

p3=8

p = 2

त्रिज्या (r) = 3p=3(2) = 6 से.मी.

उंची (h) = 4p=4(2) = 8 से.मी.

तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2+r^2}$ = $\sqrt{8^2+6^2}$ = $\sqrt{64+36}$ = $\sqrt{100}$ = 10 से.मी.

शंकूची तिरकस उंची 10 से.मी. आहे. .

66. उंची (h) = 16 से.मी., व्यास (d) = 24 से.मी. ⇒ त्रिज्या (r) = 12 से.मी.

तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ = $\sqrt{16^2 + 12^2}$ = $\sqrt{256 + 144}$ = $\sqrt{400}$ = 20 से.मी.

एकूण पृष्ठफळ (TSA)/वक्रफळ (CSA)=πr(r+l)πrl=r+ll=12+2020=3220=85

वक्रपृष्ठभागाचे एकूण पृष्ठभागाशी गुणोत्तर 5 : 8 आहे.

67. अर्धगोलाचे पार्श्व पृष्ठफळ (LSA) = $2\pi r^2$, त्रिज्या (r) = 210.5 से.मी.

LSA = $2\times\frac{22}{7}\times(210.5)\times(210.5)=2\times\frac{22}{7}\times4110.25$ = 173.25 चौ.से.मी.

100 चौ.से.मी. ला 16 रुपये दराने टीन प्लेटिंगचा खर्च = $\frac{173.25}{100}\times16$ = रु. 27.72

68. लाडूची त्रिज्या (R) = 5 से.मी.

लाडूचे घनफळ (V_1) = $\frac{4}{3}\pi R^2$

V1 = $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times5^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times125$ = 523.8 चौ. से.मी. (अंदाजे)

लाडूची त्रिज्या (r) = 2.5 से.मी.

लाडूचे घनफळ (V_2) = $\frac{4}{3}\pi r^2$

$V_2 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(2.5)^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times15.625$ = 65.47 घन से.मी. (अंदाजे)

बनवता येणाऱ्या लाडूंची संख्या = $\frac{V1}{V2} = \frac{523.8}{65.47}$ = 8 लाडू

69. शंकूच्या आकाराच्या तंबूच्या तळाचे क्षेत्रफळ = 11 x 4 चौ.मी. = 44 चौ.मी.

शंकूच्या आकाराच्या तंबूचे घनफळ = 11 x 20 = 220 घन.मी.

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 220$

$\frac{1}{3}(44)h = 220$

$h = \frac{220 \times 3}{44}$

h = 15 मी

शंकूच्या आकाराच्या तंबूची उंची 15 मी आहे.

70. भरीव वस्तूचे घनफळ = शंकूचे घनफळ + अर्धगोलाचे घनफळ

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(h+2r)$

दिले आहे r=1 सेमी आणि h=r=1 सेमी. (शंकूची उंची त्याच्या त्रिज्येएवढी आहे).

$= \frac{1}{3}\pi(1)2(1+2(1))$

$= \frac{1}{3}\pi(1+2)$

$= \frac{1}{3}\pi(3)$

= π घन से.मी.

V. चार गुणांचे प्रश्न

71. व्यास (d) = 10.5 मी ⇒ त्रिज्या (r) = 5.25 मी, उंची (h) = 3 मी

शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(5.25)^2\times 3$

$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 5.25\times 5.25\times 3$

$=\frac{606.375}{7}$

= 86.625 घन मी.

$l=\sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{3^2+5.25^2} = \sqrt{9+27.5625} = \sqrt{36.5625}$ = 6.05 से.मी. (अंदाजे)

कॅनव्हासचे क्षेत्रफळ = शंकूचे पार्श्व पृष्ठभाग क्षेत्रफळ = $\pi rl = \frac{22}{7}$ x 5.25 x 6.05 = 99.825 चौ.मी (अंदाजे)

72. तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{20^2+2.1^2} = \sqrt{400+4.41} = \sqrt{404.41}$ = 20.11 सेमी (अंदाजे)

मक्याच्या कणसाचे पार्श्व पृष्ठफळ (LSA) = $\pi rl = \frac{22}{7}$ x 2.1 x 20.11 = 132.73 चौ.से.मी. (अंदाजे)

कणसाच्या पृष्ठभागाच्या प्रत्येक 1 चौ.से.मी. वर सरासरी 4 दाणे आहेत.

म्हणून, संपूर्ण वक्रपृष्ठभागावरील दाण्यांची संख्या = 132.73 x 4 = 530.92 = 531 (अंदाजे)

73. गोलाचा व्यास d मानू.

त्रिज्या $r_1=\frac{d}{2}$

गोलाचा व्यास 25% ने कमी केला जातो.

नवीन त्रिज्या $r_2 = \frac{d}{2}(1 - \frac{25}{100}) = \frac{d}{2}(\frac{75}{100}) = \frac{3}{8}d$

गोलाचे मूळ वक्रपृष्ठफळ $S1=4\pi r^2 = 4\pi(\frac{d}{2})^2 = \pi d^2$

त्रिज्या कमी झाल्यावर गोलाचे वक्र पृष्ठफळ $S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi(\frac{3d}{8})^2 = \frac{9}{16}\pi d^2$

पृष्ठफळातील घट $S_1 - S_2 = \pi d^2 - \frac{9}{16}\pi d^2 = \frac{7}{16}\pi d^2$

गोलाच्या पृष्ठफळातील घट टक्केवारी

$\frac{S1 - S2}{S1}$ x 100

$= \frac{\frac{7}{16}\pi d2}{16\pi d2}$

$= \frac{9}{16}$ x 100

= 43.75%

74. जुन्या गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times r^3 = \frac{88}{21}r^3$

27 जुन्या गोलांचे घनफळ $=27\times\frac{88}{21}r^3$

(i) नवीन गोलाची त्रिज्या r' मानूया.

नवीन गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\pi(r')^2$

घनफळ समान असल्याने:

$\frac{88}{21} r^3 = 27\times \frac{88}{21} r^3$

$(r')^3 = 27r^3$

$r' = 3^3 r3$

$r' = 3r$

(ii) S = जुन्या गोलाचे पृष्ठफळ = $4\pi r^2$

S' = नवीन गोलाचे पृष्ठफळ $= 4\pi(r')^2 = 4\pi(3r)^2 = 36\pi r^2$

$S : S' = 4\pi r^2 : 36\pi r^2$

$= 1 : 9$

गुणोत्तर = 1 : 9

प्रकरण. 12 सांख्यिकी

अध्यापनाची निष्पत्ती

दिलेल्या माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी, दिलेली माहिती वेगवेगळ्या स्वरूपात सादर करणे, जसे की सारणीबद्ध स्वरूप (गटबद्ध किंवा अगटबद्ध), स्तंभालेख, हिस्टोग्राम (समान आणि भिन्न रुंदी आणि लांबीसह), आणि वारंवारता बहुभुज.

अध्ययन अंश

१. स्तंभालेख

२. हिस्टोग्राम

३. वारंवारता बहुभुज

(प्रत्येक प्रश्नाला एक गुण आहे)

सोपे (Easy)	मध्यम (Average)	अवघड (Difficult)	एकूण (Total)
१८	११	०६	३५

I. पुढील प्रश्न/अपूर्ण विधानांसाठी चार पर्याय दिले आहेत. योग्य पर्याय निवडा आणि त्याचे अक्षर (अल्फाबेट) सह पूर्ण उत्तर लिहा.

1. वेगवेगळ्या उंचीच्या आणि समान अंतरावर असलेल्या आयताकृती स्तंभांचा वापर करून माहितीचे दृश्यात्मक सादरीकरण म्हणजे:

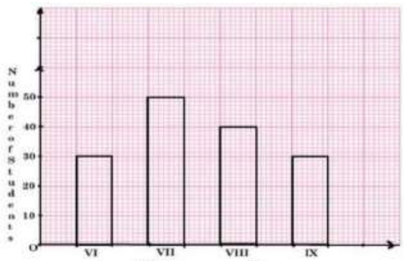
अ) स्तंभालेख

ब) त्रिज्यांतर खंडालेख

क) वारंवारता बहुभुज

ड) हिस्टोग्राम

2. दिलेल्या आलेखामध्ये कोणत्या दोन वर्गांमधील विद्यार्थ्यांची संख्या समान आहे?



अ) VI आणि VIII

ब) VI आणि VII

क) VII आणि VIII

ड) VI आणि IX

3. स्तंभालेखांमध्ये स्तंभांची लांबी किंवा उंची काय दर्शवते?

अ) वर्ग अंतराल

ब) वारंवारता

क) मध्यबिंदू

ड) माहिती

4. हिस्टोग्राममध्ये, प्रत्येक स्तंभांचे क्षेत्र कशाच्या प्रमाणात असते?

अ) वर्ग रुंदी

ब) वारंवारता

क) वरची मर्यादा

ड) मध्य

5. हिस्टोग्राम थेट कशासाठी वापरला जाऊ शकतो?

अ) प्राथमिक माहिती

ब) सतत माहिती

क) असतत माहिती

ड) दुय्यम माहिती

6. सततच्या वर्ग अंतरामध्ये, वर्ग अंतराल २० – ३० मधील अंतर काय आहे?

अ) 10

ब) 2

क) 25

ड) 30

7. वर्ग अंतराल 10– 20 चा वर्गमध्य काय आहे?

अ) 10

ब) 15

क) 20

ड) 11

8. दिलेले वर्ग अंतराल 0 – 10,10– 20, 20- 30, --------- असल्यास, 20 कोणत्या वर्ग अंतरामध्ये मानले जाते?

अ) 10 – 20

ब) 20 – 30

क) 10 – 30

ड) 15

9. जर सततच्या वर्ग अंतराचा आकार 5 असेल, तर 10 – 15 नंतरचे पुढील वर्ग अंतराल काय आहे?

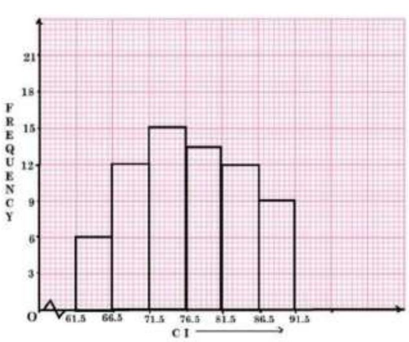
अ) 15 – 20

ब) 16 – 20

क) 15– 19

ड) 10– 25

10. दिलेल्या आलेखामध्ये, 71.5 – 76.5 या वर्ग अंतराची वारंवारता काय आहे?



अ) 9

ब) 12

क) 15

ड) 18

11. समान स्वरूपाच्या माहितीचे दोन भिन्न संच (सेट्स) तुलना करण्यासाठी योग्य आलेख कोणता आहे?

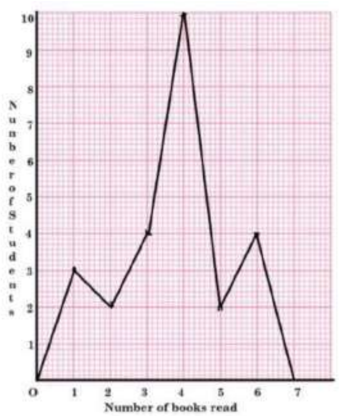
अ) हिस्टोग्राम

ब) त्रिज्यांतर खंडालेख

क) चित्र ग्राफ

ड) वारंवारता बहुभुज

12. दिलेल्या आलेखामध्ये, 6 पुस्तके वाचणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या किती आहे?



अ) 2

ब) 3

क) 4

ड) 5

13. वर्गमध्य (Class mark) खालीलपैकी कोणत्या सूत्राचा वापर करून काढला जातो?

अ) वरचीमर्यादा

ब) खालचीमर्यादा

क) वरचीमर्यादा–खालचीमर्यादा

ड) वरचीमर्यादा+खालचीमर्यादा (सोपे)

II. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (एक गुणांचे प्रश्न)

14. स्तंभालेखाची व्याख्या लिहा.

(सोपे)

15. जर वर्ग अंतराल 10 – 20 असेल, तर वर्गमध्य शोधा.

(सोपे)

16. वर्षाच्या विशिष्ट महिन्यात जन्मलेल्या मुलांच्या संख्येबद्दलची माहिती नोंदवली आहे. ही माहिती दर्शवण्यासाठी कोणता ग्राफ योग्य आहे?

(सोपे)

17. गणिताच्या FA-1 आणि FA-2 चाचणीतील मिळवलेल्या गुणांची तुलना करण्यासाठी सर्वात योग्य आलेख कोणता आहे, त्याचे नाव लिहा.

(सोपे)

III. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (दोन गुणांचे प्रश्न)

18. खालील सारणी एका कारखान्यातील खेळण्यांच्या दैनंदिन उत्पादनाचे आकडे दर्शवते. (सरासरी)

खेळण्यांची संख्या	दिवसांची संख्या
0 - 50	5
50 - 100	8
100 - 150	12
150 - 200	5

हा माहिती दर्शवण्यासाठी हिस्टोग्राम काढा.

19. एका वर्गात विद्यार्थ्यांची संख्या 36 आहे. विद्यार्थ्यांना खालील सारणीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे 5 गटांमध्ये विभागले आहे. पुढीलसाठी स्तंभालेख काढा: (सरासरी)

गट	A	B	C	D	E
विद्यार्थ्यांची संख्या	5	8	6	10	7

20. खालील सारणी विद्यार्थ्यांकडून मिळवलेले गुण दर्शवते, एक हिस्टोग्राम तयार करा.

गुण | 0–10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50

विद्यार्थी | 2 | 5 | 7 | 10 | 6 1

(सरासरी)

21. एका परीक्षेत 30 विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत. (सरासरी)

गुणांचे अंतर	विद्यार्थ्यांची संख्या
0 - 10	4
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	6
40 – 50	2

या माहितीसाठी हिस्टोग्राम काढा.

22. ₹22,000 मासिक उत्पन्न असलेल्या एका कुटुंबाने दरमहा विविध शीर्षकांखालील खालील खर्च नियोजित केला आहे. (सरासरी)

(येथे खर्च तपशील दिलेला नाही, कृपया तो तपशील जोडा जेणेकरून मी त्याचे भाषांतर करू शकेन. उदाहरणार्थ, 'अन्न: ₹5000', 'शिक्षण: ₹4000 इ.)

या माहितीचा स्तंभालेख काढा.

23. एका राज्य विधानसभा निवडणुकीच्या मतदान निकालानुसार, विविध राजकीय पक्षांनी जिंकलेल्या जागा खाली दिल्या आहेत. (सरासरी)

राजकीय पक्ष	A	B	C	D	E	F
जिंकलेल्या जागा	75	55	37	29	10	37

मतदान निकाल दर्शवण्यासाठी स्तंभालेख काढा.

24. स्तंभालेख आणि हिस्टोग्राममधील दोन फरक लिहा. (सरासरी)

25. वारंवारता बहुभुजाची व्याख्या करा. तो हिस्टोग्रामपेक्षा कसा वेगळा आहे? (सोपे)

IV. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (तीन गुणांचे प्रश्न)

26. खालील माहितीच्या आधारे वारंवारता बहुभुज काढा. (सरासरी)

गुण	0 – 10	10 - 20	20– 30	30 – 40	40 – 50
वारंवारता	3	9	17	12	9

27. खालील सारणी शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांची उंची दर्शवते. (सरासरी)

उंची (सें.मी. मध्ये)	140- 145	145-150	150-155	155-160	160-165
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	12	8	10	4

वारंवारता बहुभुज काढा.

28. खालील सारणी 400 निऑन दिव्यांचे आयुष्य दर्शवते. (कठीण)

आयुष्याचा कालावधी (तासांमध्ये)	दिव्यांची संख्या
300 – 400	14
400 – 500	56
500 – 600	60
600 – 700	86
700– 800	74
800 – 900	62
900 – 1000	48

i. दिलेल्या माहितीचे हिस्टोग्रामच्या मदतीने सादरीकरण करा.

ii. 700 तासांपेक्षा जास्त आयुष्य असलेले किती दिवे आहेत?

V. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (चार गुणांचे प्रश्न)

29. 40 कुटुंबांचे मासिक उत्पन्न खाली दर्शविले आहे. (कठीण)

(येथे उत्पन्न तपशील दिलेला नाही, कृपया तो तपशील जोडा जेणेकरून मी त्याचे भाषांतर करू शकेन.)

अ) ही माहिती दर्शवण्यासाठी हिस्टोग्राम काढा.

ब) त्याच आलेखामध्ये मध्यबिंदू वापरून वारंवारता बहुभुज काढा.

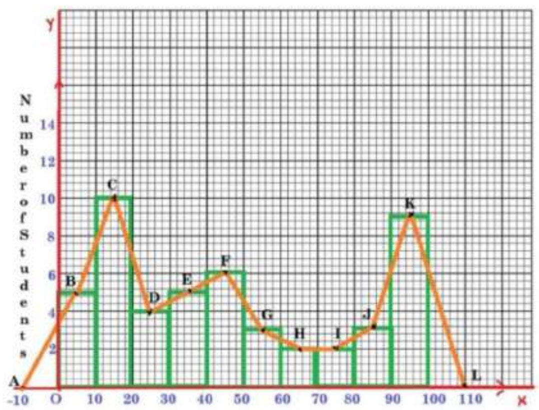
30. खालील सारणी शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांची उंची दर्शवते. (कठीण)

उंची (सें.मी. मध्ये)	140-145	145-150	150 - 155	155 - 160	160 - 165
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	12	18	10	04

अ) वारंवारता बहुभुज काढा.

ब) आलेखामधील विद्यार्थ्यांच्या उंचीबद्दल तुम्ही काय अनुमान काढू शकता?

31. गणिताच्या परीक्षेत विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत. (सरासरी)



गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	10
30 - 40	6
40 - 50	2

अ) प्रत्येक वर्गाचा मध्यबिंदू काढा.

ब) या माहिती माहितीचा वारंवारता बहुभुज (frequency polygon) काढा.

32. 100 गुणांच्या परीक्षेत विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वारंवारता बहुभुजाद्वारे (frequency polygon) दर्शविले आहेत. आलेखाचे निरीक्षण करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (कठीण)

(येथे आलेख दिलेला नाही, आलेखाशिवाय या प्रश्नांची उत्तरे देता येणार नाहीत.)

अ) किती विद्यार्थ्यांनी 40 पेक्षा जास्त गुण मिळवले?

ब) किती विद्यार्थ्यांनी 60 ते 80 गुण मिळवले?

क) किती विद्यार्थ्यांनी 90 पेक्षा जास्त गुण मिळवले?

ड) जर ≤ 40 गुण NC श्रेणीत असतील, तर NC श्रेणीत किती विद्यार्थी आहेत?

VI. पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (पाच गुणांचे प्रश्न)

33. खालील माहिती 0 - 50 गुणांच्या श्रेणीत गुण मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या दर्शवतो. एकाच आलेखावर ग्हिस्टोग्राम आणि वारंवारता बहुभुज (frequency polygon) काढा. (सरासरी)

गुण	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थ्यांची संख्या	3	9	12	7	4

34. खालील सारणी दोन विभागांमधील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांनुसार त्यांचे वितरण दर्शवते. (कठीण)

विभाग A

गुण	वारंवारता
0 - 10	3
10 - 20	9
20 - 30	17
30 - 40	12
40 - 50	9

विभाग B

| गुण | वारंवारता |

| :----- | :------- |

| 0 - 10 | 5 |

| 10 - 20 | 19 |

| 20 - 30 | 15 |

| 30 - 40 | 10 |

| 48 - 50 | 1 |

एकाच आलेखावर दोन वारंवारता बहुभुजांच्या साहाय्याने दोन्ही विभागांतील विद्यार्थ्यांचे गुण दर्शवा. दोन बहुभुजांवरून दोन्ही विभागांच्या कामगिरीची तुलना करा.

---

35. एका वर्गात 80 विद्यार्थ्यांनी (100 गुणांसाठी) मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.

मिळवलेले गुण	10– 20	20 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 100
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	17	15	16	26

दिलेल्या माहितीचा हिस्टोग्राम काढा.

[कठीण]

I. बहुपर्यायी प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. अ) स्तंभालेख
2. ड) **VI आणि IX**
3. ब) **वारंवारता (Frequency)**
4. ब) **वारंवारता (Frequency)**
5. ब) सातत्य माहिती**(Continuous data)**
6. अ) **10**
7. ब) **15**
8. ब) **20 – 30**
9. अ) **15 – 20**
10. क) **15**
11. ड) **वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon)**
12. क) **4**
13. ड) **वरची मर्यादा + खालची मर्यादा**

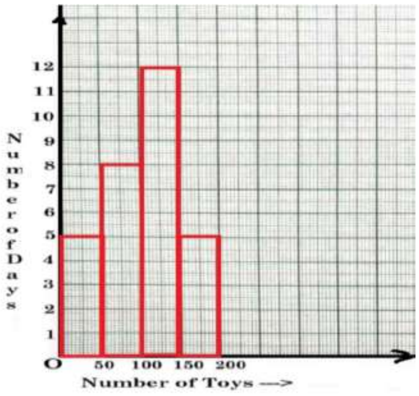
II. एक गुणांचे प्रश्न (One Mark Questions)

- **स्तंभालेख (Bar Graph):** स्तंभालेख ही आयताकृती स्तंभांचा वापर करून माहितीचा आलेखीय मांडणी आहे, ज्यात स्तंभांमध्ये समान अंतर असते.
- **10 – 20 चा वर्गमध्य (Class Mark) 15 आहे.** (2(10+20) = 15)
- **स्तंभालेख (Bar Graph)**
- **वारंवारता बहुभुज (Frequency Polygon)**

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

4. (येथे हिस्टोग्राम काढायला सांगितले आहे, परंतु प्रत्यक्ष आलेखकाढणे शक्य नाही. मात्र, आपण हिस्टोग्राम काढण्यासाठी मार्गदर्शन देऊ शकतो.)

हिस्टोग्राम काढण्यासाठी सूचना:



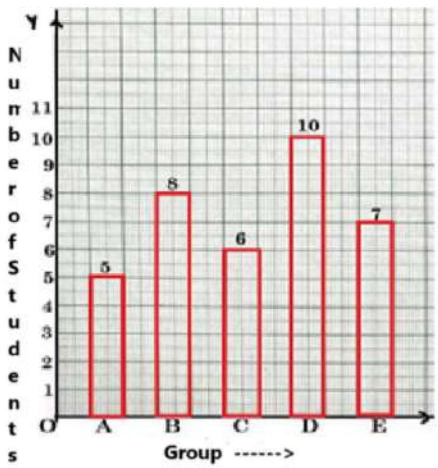
1. **एक्स अक्ष(X-axis) वर:** 'खेळण्यांची संख्या' (वर्ग अंतराल: 0-50, 50-100, 100-150, 150-200) दर्शवा.
2. **वाय अक्ष (Y-axis) वर:** 'दिवसांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा.
3. प्रत्येक वर्ग अंतराला संबंधित वारंवारतेच्या उंचीचा आयत (बार) काढा. हिस्टोग्राममध्ये स्तंभ एकमेकांना लागून असतात, त्यांच्यात अंतर नसते.

यासाठी तुम्हाला आलेख पेपर लागेल.

तुमच्याकडे आणखी काही प्रश्न आहेत का?

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

19. एका वर्गात विद्यार्थ्यांची संख्या 36 आहे. विद्यार्थ्यांना खालील सारणीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे 5 गटांमध्ये विभागले आहे. पुढीलसाठी स्तंभालेख काढा: (सरासरी)



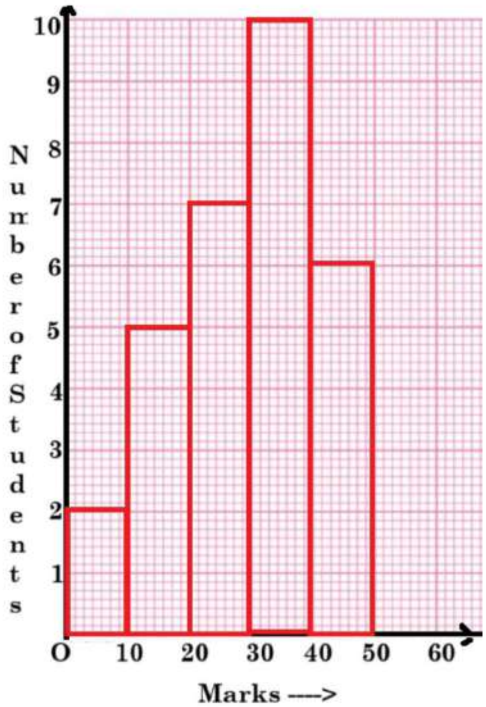
गट	A	B	C	D	E
विद्यार्थ्यांची संख्या	5	8	6	10	7

स्तंभालेख कसा काढायचा:

33. **एक्स-अक्ष (X-axis):** या अक्षावर विद्यार्थ्यांचे गट (A, B, C, D, E) दर्शवा. गटांमध्ये समान अंतर ठेवा.
34. **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'विद्यार्थ्यांची संख्या' दर्शवा. विद्यार्थ्यांच्या संख्येनुसार योग्य प्रमाण निवडा (उदा. सें.मी. = 1 विद्यार्थी किंवा 2 विद्यार्थी).
35. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक गटासाठी, संबंधित विद्यार्थ्यांच्या संख्येइतक्या उंचीचा एक आयताकृती बार (स्तंभ) काढा. प्रत्येक स्तंभाची रुंदी समान असावी आणि स्तंभाचे समान अंतर असावे.

---

20. खालील सारणी विद्यार्थ्यांकडून मिळवलेले गुण दर्शवते, एक हिस्टोग्राम तयार करा. (सरासरी)

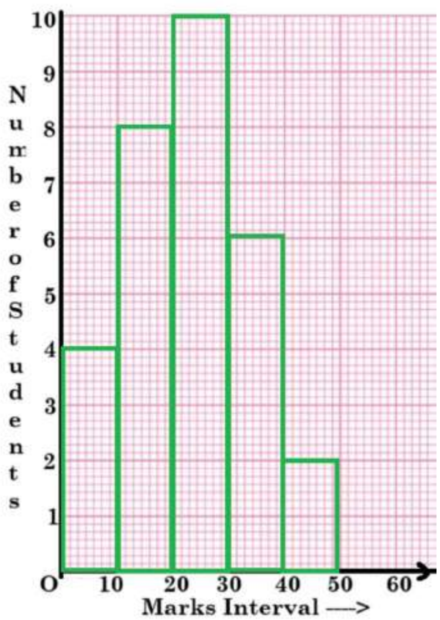


गुण	0– 10	10 – 20	20– 30	30– 40	40– 50
विद्यार्थी	2	5	7	10	6

हिस्टोग्राम कसा काढायचा:

51. **एक्स अक्ष (X-axis):** या अक्षावर 'गुण' (वर्ग अंतराल: 0- 10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50) दर्शवा.
52. **वाय -अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'विद्यार्थ्यांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
53. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक वर्ग अंतरासाठी, संबंधित विद्यार्थ्यांच्या संख्येइतक्या उंचीचा एक आयताकृती स्तंभ काढा. हिस्टोग्राममध्ये, हे स्तंभ एकमेकांना लागून असतात, कारण वर्ग अंतराल **सतत (continuous)** आहेत.

21. एका परीक्षेत 30 विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत. (सरासरी)



गुणांचे अंतर	विद्यार्थ्यांची संख्या
0– 10	4
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	6
40 – 60	2

या माहितीसाठी हिस्टोग्राम काढा.

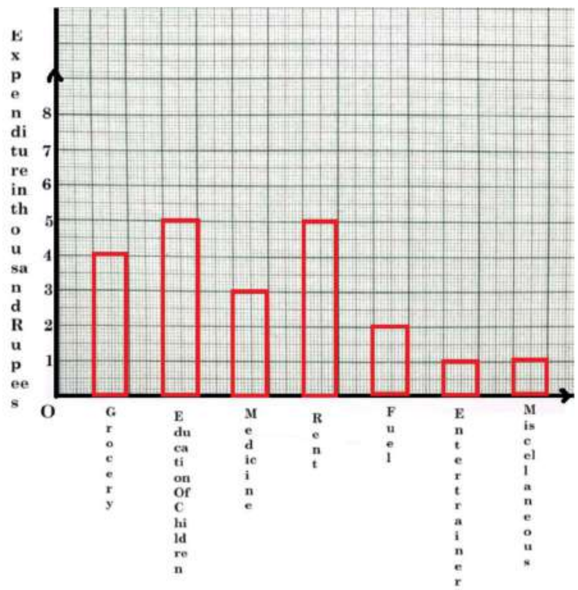
हिस्टोग्राम कसा काढायचा:

43. **एक्स -अक्ष (X-axis):** या अक्षावर 'गुणांचे अंतर' (0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50) दर्शवा.
44. **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'विद्यार्थ्यांची संख्या' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
45. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक गुणांच्या अंतरासाठी, संबंधित विद्यार्थ्यांच्या संख्येइतक्या उंचीचा एक आयताकृती स्तंभ काढा. हे स्तंभ एकमेकांना लागून असावेत.

III. दोन गुणांचे प्रश्न (Two Mark Questions)

22. ▫22,000 मासिक उत्पन्न असलेल्या एका कुटुंबाने दरमहा विविध शीर्षकांखालील खालील खर्च नियोजित केला आहे. (सरासरी)

(येथे खर्चाचा तपशील दिलेला नसल्यामुळे, मी तुम्हाला एक उदाहरण देऊन स्तंभालेख कसा काढायचा हे समजावून सांगतो. कृपया तुमच्या प्रश्नातील मूळ तपशील वापरा.)



उदाहरणार्थ, जर खर्च तपशील असा असेल:

45. **अन्न:** ▫8000
46. **शिक्षण:** ▫5000
47. **घरभाडे:** ▫4000
48. **वाहतूक:** ▫2000
49. **इतर:** ▫3000

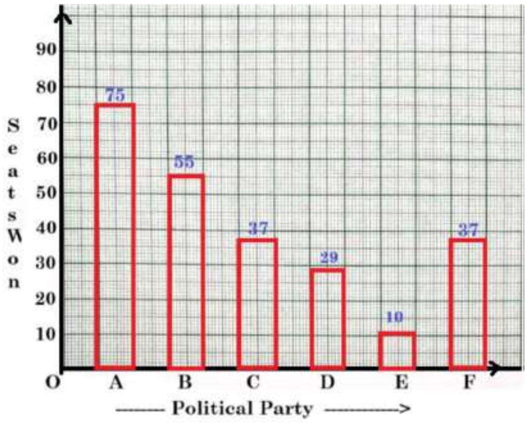
स्तंभालेख कसा काढायचा:

- **एक्स-अक्ष (X-axis):** या अक्षावर खर्चाची शीर्षके (उदा. अन्न, शिक्षण, घरभाडे, वाहतूक, इतर) दर्शवा.
- **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'खर्च (▫ मध्ये)' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा (उदा. 1 सें.मी. = ▫1000किंवा ▫2000).
- **स्तंभालेख काढणे:** प्रत्येक खर्चाच्या शीर्षकासाठी, संबंधित रकमेइतक्या उंचीचा एक आयताकृती बार (स्तंभ) काढा. प्रत्येक स्तंभाची रुंदी समान असावी आणि संभामध्येसमान अंतर असावे.

---

23. एका राज्य विधानसभा निवडणुकीच्या मतदान निकालानुसार, विविध राजकीय पक्षांनी जिंकलेल्या जागा खाली दिल्या आहेत. (सरासरी)

राजकीय पक्ष	A	B	C	D	E	F
जिंकलेल्या जागा	75	55	37	29	10	37



मतदान निकाल दर्शवण्यासाठी बार ग्राफ काढा.

बार ग्राफ कसा काढायचा:

- **एक्स -अक्ष (X-axis):** या अक्षावर राजकीय पक्ष (A, B, C, D, E, F) दर्शवा.
- **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'जिंकलेल्या जागा' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा (उदा. 1सें.मी. = 5 जागा किंवा 10 जागा).
- **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक राजकीय पक्षासाठी, त्यांनी जिंकलेल्या जागांइतक्या उंचीचा एक आयताकृती स्तंभ काढा. प्रत्येक स्तंभाची रुंदी समान असावी आणि स्तंभामध्ये समान अंतर असावे.

स्तंभालेख आणि हिस्टोग्राममधील दोन फरक लिहा. (सरासरी)

स्तंभालेख (Bar Graph) आणि हिस्टोग्राम (Histogram) मधील फरक:

वैशिष्ट्य	स्तंभालेख (Bar Graph)	हिस्टोग्राम (Histogram)
स्तंभालेखाची मांडणी	स्तंभ वेगळे असतात (त्यांच्यात अंतर असते).	स्तंभ एकमेकांना लागून असतात (त्यांच्यात अंतर नसते).
दर्शविलेली माहिती	प्रत्येक स्तंभ गट किंवा श्रेणी दर्शवतो.	प्रत्येक स्तंभ वर्ग अंतराल किंवा मूल्यांची श्रेणी दर्शवतो.
मांडणीचा क्रम	स्तंभ कोणत्याही क्रमाने मांडले जाऊ शकतात.	स्तंभ चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडले जातात.

---

25. वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon) आणि हिस्टोग्राममधील फरक. (सोपे)

वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon):

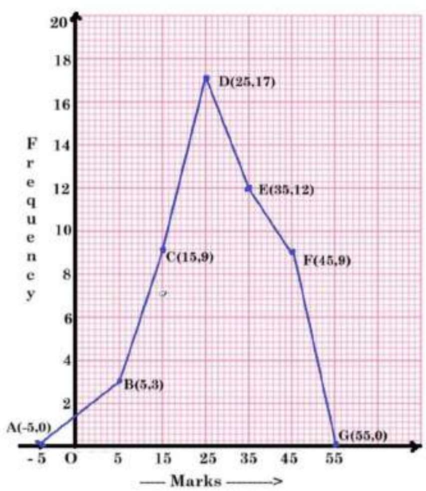
वारंवारता बहुभुज हे वारंवारता वितरणाचे आलेखीय सादरीकरण आहे, जे प्रत्येक वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूंना आणि त्यांच्या संबंधित वारंवारतांना सरळ रेषांनी जोडून तयार केले जाते.

वारंवारता बहुभुज हिस्टोग्रामपेक्षा कसा वेगळा आहे:

वारंवारता बहुभुज ग्राफ एक रेषाखंडाने (line segment) दर्शविलेला वक्र असतो, तर हिस्टोग्राम आयताकृती स्तंभा द्वारे माहिती दर्शवतो आणि या स्तंभामध्ये कोणतीही जागा नसते (ते एकमेकांना लागून असतात).

IV. तीन गुणांचे प्रश्न (Three Mark Questions)

26. खालील माहितीसाठी वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon) काढा. (सरासरी)



गुण	0– 10	10- 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
वारंवारता	3	9	17	12	9

वारंवारता बहुभुज कसा काढायचा:

33. **मध्यबिंदू (Midpoints) काढा:** प्रत्येक वर्ग अंतराचा मध्यबिंदू निश्चित करा.

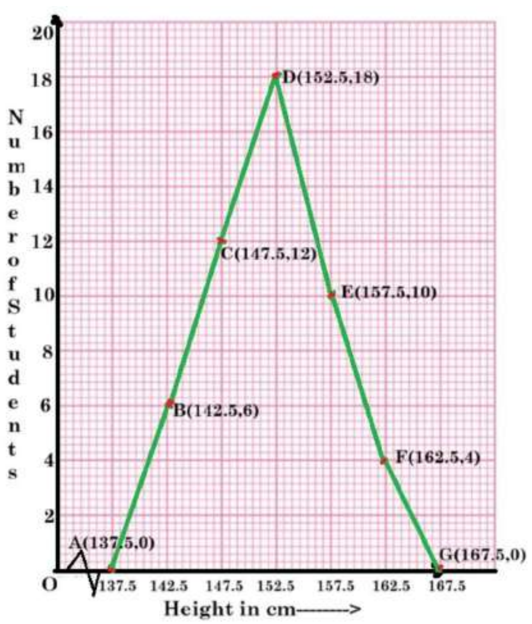
1. 0 - 10 साठी मध्यबिंदू: 5
2. 10-20 साठी मध्यबिंदू: 15

3. 20-30साठी मध्यबिंदू: 25
4. 30 -40 साठी मध्यबिंदू: 35
5. 40-50 साठी मध्यबिंदू: 45

34. **एक्स-अक्ष (X-axis) वर:** मध्यबिंदू दर्शवा.
35. **वाय अक्ष (Y-axis) वर:** 'वारंवारता' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
36. **बिंदू निश्चित करा:** प्रत्येक मध्यबिंदूसाठी, त्याच्या संबंधित वारंवारतेनुसार बिंदू निश्चित करा (उदा. (5, 3), (15, 9), (25, 17), (35, 12), (45, 9)).
37. **जोडा:** हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडा.
38. **अक्षांशी जोडणे:** आलेख पूर्ण करण्यासाठी, पहिल्या मध्यबिंदूच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) आणि शेवटच्या मध्यबिंदूच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना वारंवारता बहुभुजाशी जोडा. यामुळे बहुभुज क्ष-अक्षाला स्पर्श करेल.

---

27. खालील सारणी शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांची उंची दर्शवते. (सरासरी)



उंची (सें.मी. मध्ये)	मध्यबिंदू (MIDPOINT)	विद्यार्थ्यांची संख्या (F)
140-145	142.5	6
145 - 150	147.5	12
150-155	152.5	18

उंची (सें.मी. मध्ये)	मध्यबिंदू (MIDPOINT)	विद्यार्थ्यांची संख्या (F)
155 -160	157.5	10
160-165	162.5	04

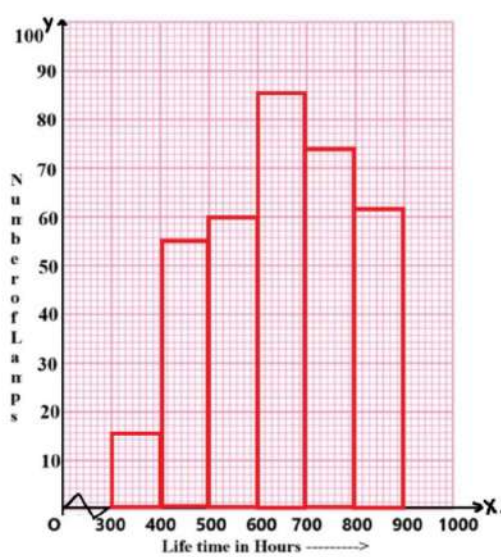
वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon) काढा.

वारंवारता बहुभुज कसा काढायचा:

1. **मध्यबिंदू निश्चित करा:** सारणीमध्ये मध्यबिंदू आधीच दिलेले आहेत.
2. **एक्स अक्ष(X-axis) वर:** मध्यबिंदू (142.5, 147.5, 152.5, 157.5, 162.5) दर्शवा.
3. **वायअक्ष- (Y-axis) वर:** 'विद्यार्थ्यांची संख्या' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
4. **बिंदू निश्चित करा:** प्रत्येक मध्यबिंदूसाठी, त्याच्या संबंधित विद्यार्थ्यांच्या संख्येनुसार बिंदू निश्चित करा (उदा. (142.5, 6), 147.5, 12), (152.5, 18), (157.5, 10), (162.5, 4)).
5. **जोडा:** हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडा.
6. **अक्षांशी जोडणे:** ग्राफ पूर्ण करण्यासाठी, पहिल्या मध्यबिंदूच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर आणि शेवटच्या मध्यबिंदूच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्यांची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना वारंवारता बहुभुजाशी जोडा.

---

28. खालील सारणी 400 निऑन दिव्यांचे आयुष्य दर्शवते. (कठीण)



आयुष्याचा कालावधी (तासांमध्ये)	दिव्यांची संख्या
300– 400	14
400– 500	56
500– 600	60
600 – 700	86
700 – 800	74
800 – 900	62
900 – 1000	48

i. दिलेल्या माहितीचे हिस्टोग्रामच्या मदतीने सादरीकरण करा.

हिस्टोग्राम कसा काढायचा:

45. **एक्स -अक्ष (X-axis):** या अक्षावर 'आयुष्याचा कालावधी (तासांमध्ये)' (वर्ग अंतराल: ३००-४००, ४००-५००, इत्यादी) दर्शवा.
46. **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'दिव्यांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
47. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक वर्ग अंतरासाठी, संबंधित दिव्यांच्या संख्येइतक्या उंचीचा एक आयताकृती बार (स्तंभ) काढा. हे बार एकमेकांना लागून असावेत, कारण वर्ग अंतराल सतत (continuous) आहेत.

ii. 700 तासांपेक्षा जास्त आयुष्य असलेले किती दिवे आहेत?

उत्तर: 700 तासांपेक्षा जास्त आयुष्य असलेल्या दिव्यांची संख्या मोजण्यासाठी, आपल्याला 700 तासांच्या पुढील वर्ग अंतरातील दिव्यांची संख्या जोडावी लागेल:

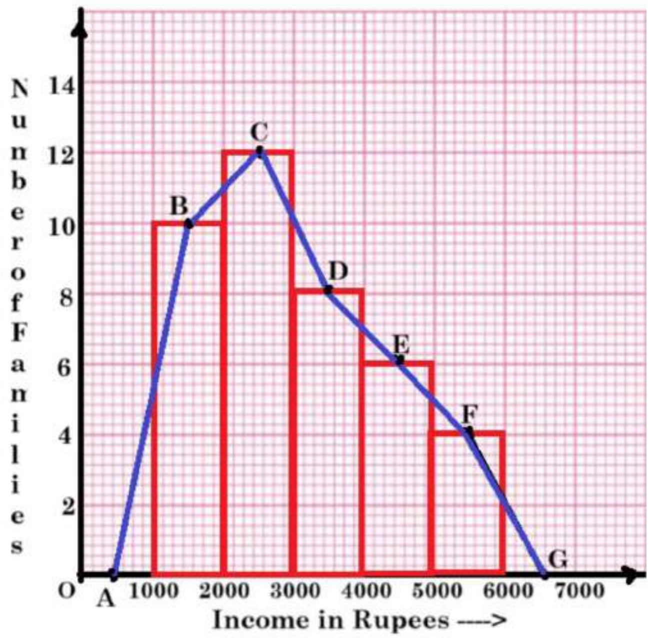
- 700 – 800 तासांमधील दिवे: 74
- 800 – 900 तासांमधील दिवे: 62
- 900 – 1000 तासांमधील दिवे: 48

एकूण दिवे = 74+ 62+ 48 = 184

म्हणून, 184 **दिव्यांचे आयुष्य 700 तासांपेक्षा जास्त आहे.**

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Mark Questions)

29. 40 कुटुंबांचे मासिक उत्पन्न खाली दर्शविले आहे. (कठीण)



(टीप: येथे मासिक उत्पन्नाचा तपशील दिलेला नाही. ग्राफ काढण्यासाठी तुम्हाला उत्पन्नाचे वर्ग अंतराल (class intervals) आणि प्रत्येक अंतरातील कुटुंबांची संख्या (frequency) आवश्यक असेल.)

अ) ही माहिती दर्शवण्यासाठी हिस्टोग्राम काढा.

हिस्टोग्राम कसा काढायचा:

1. **एक्स अक्ष (X-axis):** या अक्षावर 'मासिक उत्पन्न' (दिलेल्या वर्ग अंतरांमध्ये) दर्शवा.
2. **वाय-अक्ष (Y-axis):** या अक्षावर 'कुटुंबांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
3. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक उत्पन्न वर्ग अंतरासाठी, संबंधित कुटुंबांच्या संख्येइतक्या उंचीचा एक आयताकृती बार(स्तंभ) काढा. हे स्तंभ एकमेकांना लागून असावेत.

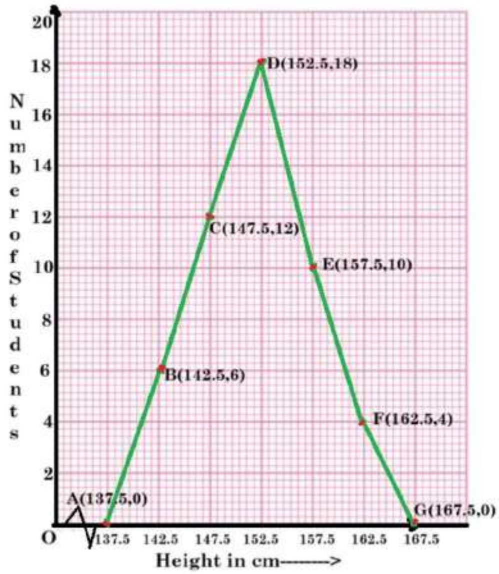
ब) त्याच आलेखावरून मध्यबिंदू वापरून वारंवारता बहुभुज (frequency polygon) काढा.

वारंवारता बहुभुज कसा काढायचा (हिस्टोग्रामवर):

12. **मध्यबिंदू (Midpoints) काढा:** प्रत्येक हिस्टोग्राम स्तंभांच्या वरच्या बाजूच्या मध्यबिंदू निश्चित करा.
13. **बिंदू जोडा:** या मध्यबिंदूंना सरळ रेषाखंडांनी जोडा.
14. **अक्षांशी जोडणे:** वारंवारता बहुभुज एक्स अक्षाला स्पर्श करण्यासाठी, पहिल्या स्तंभांच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) आणि शेवटच्या स्तंभांच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना बहुभुजाशी जोडा.

---

30. खालील सारणी शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांची उंची दर्शवते. (कठीण)



उंची (सें.मी. मध्ये)	140-145	145 -150	150-155	155-160	160-165
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	12	18	10	04

अ) वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon) काढा.

वारंवारता बहुभुज कसा काढायचा:

- **मध्यबिंदू (Midpoints) काढा:**
  - 140-145 साठी मध्यबिंदू: 142.5
  - 145-150 साठी मध्यबिंदू: 147.5
  - 150-155 साठी मध्यबिंदू: 152.5
  - 155-160 साठी मध्यबिंदू:157.5
  - 160-165 साठी मध्यबिंदू: 162.5
- **एक्स -अक्ष (X-axis) वर:** मध्यबिंदू दर्शवा.
- **वाय-अक्ष (Y-axis) वर:** 'विद्यार्थ्यांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
- **बिंदू निश्चित करा:** प्रत्येक मध्यबिंदूसाठी, त्याच्या संबंधित विद्यार्थ्यांच्या संख्येनुसार बिंदू निश्चित करा (उदा. (142.5, 6), (147.5, 12), (152.5, 18), (157.5, 10), (162.5, 4)).
- **जोडा:** हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडा.
- **अक्षांशी जोडणे:** ग्राफ पूर्ण करण्यासाठी, पहिल्या मध्यबिंदूच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर आणि शेवटच्या मध्यबिंदूच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्यांची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना वारंवारता बहुभुजाशी जोडा.

ब) आलेखावरून विद्यार्थ्यांच्या उंचीबद्दल तुम्ही काय अनुमान काढू शकता?

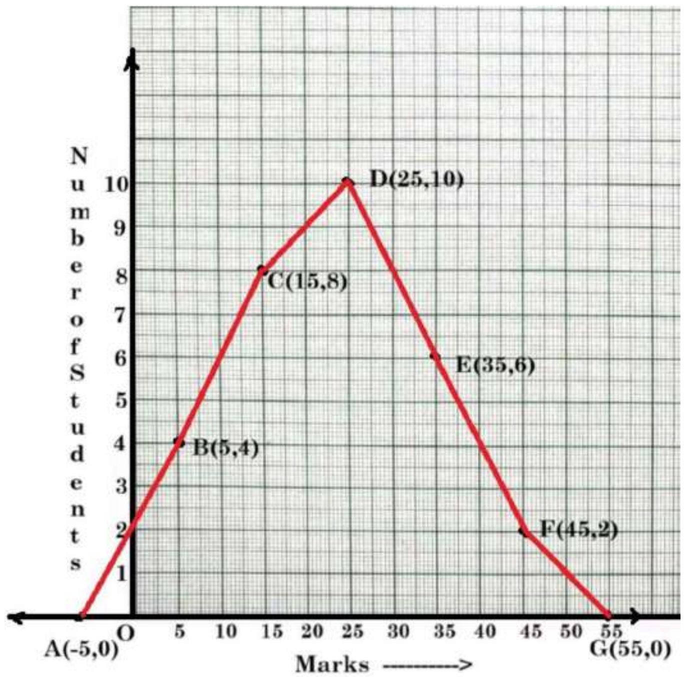
अ) बहुतेक विद्यार्थ्यांची उंची सरासरी 150 – 155 सें.मी. च्या आसपास आहे.

ब) खूप कमी विद्यार्थी खूप बुटके (140 – 145 सें.मी.) किंवा खूप उंच (160 – 165 सें.मी.) आहेत.

क) विद्यार्थ्यांच्या उंचीच्या गटात सामान्य वितरण (normal distribution) दिसून येते.

---

31. गणिताच्या परीक्षेत विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत. (सरासरी)



वर्ग अंतराल (C I)	मध्यबिंदू (MID POINT)	वारंवारता (FREQUENCY)
0 - 10	5	4
10 - 20	15	8
20 - 30	25	10
30 - 40	35	6
४० - ५०	45	2

अ) प्रत्येक वर्गाचा मध्यबिंदू काढा.

(उत्तर सारणीमध्ये आधीच दिलेले आहे:5, 15, 25, 35, 45.)

ब) माहितीसाठी वारंवारता बहुभुज (frequency polygon) काढा.

वारंवारता बहुभुज कसा काढायचा:

1. **मध्यबिंदू निश्चित करा:** सारणीमध्ये मध्यबिंदू (5, 15, 25, 35, 45) दिलेले आहेत.

   एक्स अक्ष (X-axis) वर: मध्यबिंदू दर्शवा.

2. **वाय अक्ष (Y-axis) वर:** 'वारंवारता' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
3. **बिंदू निश्चित करा:** प्रत्येक मध्यबिंदूसाठी, त्याच्या संबंधित वारंवारतेनुसार बिंदू निश्चित करा (उदा. (5, 4), (15, 8), (25, 10), (35, 6), (45, 2)).
4. **जोडा:** हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडा.
5. **अक्षांशी जोडणे:** आलेख पूर्ण करण्यासाठी, पहिल्या मध्यबिंदूच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर आणि शेवटच्या मध्यबिंदूच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्यांची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना वारंवारता बहुभुजाशी जोडा.

V. चार गुणांचे प्रश्न (Four Mark Questions)

32. 100 गुणांच्या परीक्षेत विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वारंवारता बहुभुजाद्वारे (frequency polygon) दर्शविले आहेत. आलेखाचे निरीक्षण करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (कठीण)

(टीप: आलेख दिलेला नसल्यामुळे, मी फक्त उत्तरांचे भाषांतर करत आहे.)

अ) 25 विद्यार्थ्यांनी 40 पेक्षा जास्त गुण मिळवले.

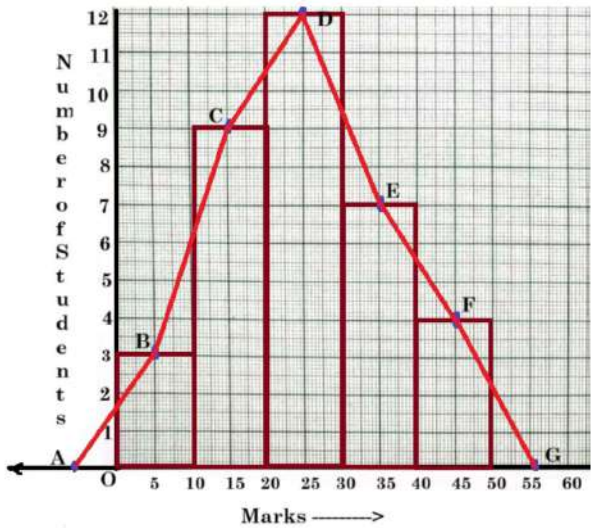
ब) 4 विद्यार्थ्यांनी 60 ते 80 गुण मिळवले.

क) 9 विद्यार्थ्यांनी 90 पेक्षा जास्त गुण मिळवले.

ड) 24 विद्यार्थी NC श्रेणीत आहेत.

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Mark Questions)

33. खालील माहिती 0 -50 गुणांच्या श्रेणीत गुण मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या दर्शवतो. एकाच आलेखावर हिस्टोग्राम आणि वारंवारता बहुभुज (frequency polygon) काढा. (सरासरी)



वर्ग अंतराल (C I)	मध्यबिंदू (MID POINT)	वारंवारता (FREQUENCY)
0 -10	5	3
10 - 20	15	9
20 - 30	25	12
30 - 40	35	7
40 - 50	45	4

हिस्टोग्राम आणि वारंवारता बहुभुज एकाच ग्राफवर कसे काढायचे:

55. **एक्स -अक्ष (X-axis) वर:** 'गुण' (वर्ग अंतराल) दर्शवा.
56. **वाय-अक्ष (Y-axis) वर:** 'विद्यार्थ्यांची संख्या' (वारंवारता) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.

हिस्टोग्राम काढण्यासाठी:

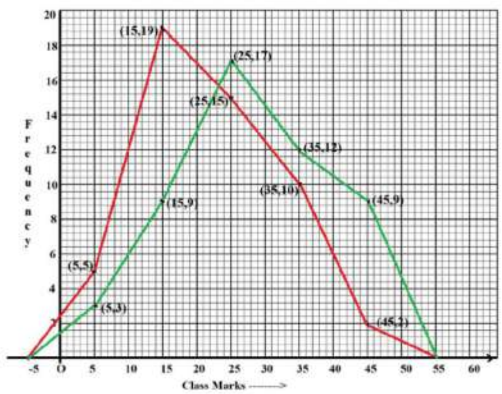
- प्रत्येक वर्ग अंतराला (उदा. 0-10, 10-20) संबंधित वारंवारतेच्या उंचीचा एक आयत (बार) काढा. हे बार एकमेकांना लागून असावेत.

वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी (हिस्टोग्रामवर):

24. प्रत्येक हिस्टोग्राम स्तंभाच्यावरच्या बाजूच्या **मध्यबिंदू** निश्चित करा. (उदा. ०-१० साठी मध्यबिंदू ५ आहे, आणि वारंवारता ३ आहे, म्हणून (5, 3) हा बिंदू घ्या.)
25. या मध्यबिंदूंना सरळ **रेषाखंडांनी जोडा**.
26. आलेख पूर्ण करण्यासाठी, पहिल्या स्तंभाच्या मागील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) आणि शेवट शेवटच्या स्तंभाच्या पुढील वर्ग अंतराच्या मध्यबिंदूवर (ज्याची वारंवारता ० असेल) बिंदू घेऊन त्यांना बहुभुजाशी जोडा. यामुळे बहुभुज एक्स-अक्षाला स्पर्श करेल.

---

34. खालील सारणी दोन विभागांमधील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांनुसार त्यांचे वितरण दर्शवते. (कठीण)



गुण	वर्ग मध्यबिंदू (CLASS MARKS(MID POINT))	विभाग A (वारंवारता)	विभाग B (वारंवारता)
0 - 10	5	3	5
10 - 20	15	9	19
20-30	25	17	15
30–40	35	12	10
40-50	45	9	1

एकाच आलेखावरील दोन वारंवारता बहुभुजांच्या साहाय्याने दोन्ही विभागांतील विद्यार्थ्यांचे गुण दर्शवा. दोन बहुभुजांवरून दोन्ही विभागांच्या कामगिरीची तुलना करा.

दोन वारंवारता बहुभुज एकाच आलेखावर कसे काढायचे:

7. **एक्स-अक्ष (X-axis) वर:** वर्ग मध्यबिंदू (5, 15, 25, 35, 45) दर्शवा.
8. **वाय अक्ष (Y-axis) वर:** 'वारंवारता' दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
9. **बिंदू निश्चित करा (विभाग A साठी):** विभाग A च्या मध्यबिंदू आणि वारंवारता वापरून बिंदू निश्चित करा (उदा. (5, 3), (15, 9), (25, 17), (35, 12), (45, 9)). हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडून विभाग A चा बहुभुज काढा. वेगळ्या रंगाचा किंवा चिन्हाचा वापर करा.
10. **बिंदू निश्चित करा (विभाग B साठी):** विभाग B च्या मध्यबिंदू आणि वारंवारता वापरून बिंदू निश्चित करा (उदा. 5, 5), (15, 19), (25, 15), (35, 10), (45, 1)). हे बिंदू सरळ रेषाखंडांनी जोडून विभाग B चा बहुभुज काढा. विभाग A पेक्षा वेगळ्या रंगाचा किंवा चिन्हाचा वापर करा.
11. **अक्षांशी जोडणे:** दोन्ही बहुभुजांना क्ष-अक्षाशी त्यांच्या संबंधित ० वारंवारता बिंदूंवर जोडा.

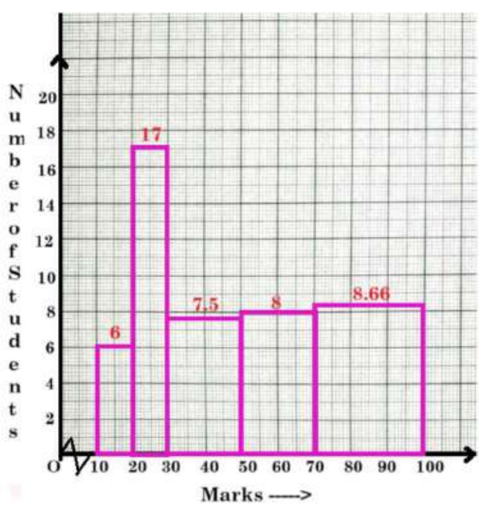
दोन बहुभुजांवरून कामगिरीची तुलना:

विभाग "A" चा उच्च बिंदू विभाग "B" पेक्षा जास्त श्रेणीत आहे, त्यामुळे विभाग "A" ची कामगिरी विभाग "B" पेक्षा चांगली होती.

या प्रश्नांसाठी तुम्हाला ग्राफ पेपर आणि पेन्सिलची आवश्यकता असेल. तुम्हाला आणखी काही मदत हवी आहे का?

VI. पाच गुणांचे प्रश्न (Five Mark Questions)

३५. एका वर्गात 80 विद्यार्थ्यांनी (100गुणांसाठी) मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.



(टीप: दिलेल्या सारणीतील गुणांचे वर्ग अंतराल आणि वारंवारता जुळत नाहीत. तुमच्या मूळ प्रश्नात 10-20, 20-30, 30-50, 50-70, 70-100 असे वर्ग अंतराल होते, तर दिलेल्या उत्तरामध्ये 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60 असे वर्ग अंतराल आणि वेगळ्या वारंवारता वापरल्या आहेत. मी दिलेल्या उत्तर सारणीनुसार भाषांतर करत आहे.)

गुण (MARKS)	वारंवारता (FREQUENCY)	वर्गाची रुंदी (WIDTH OF CLASS)	आयताची लांबी (LENGTH OF RECTANGLE)
10 – 20	6	10	106×10=6
20 – 30	17	10	1017×10=17
30 – 40	15	20	2015×10=7.5
40 – 50	16	20	2016×6=8
50 - 60	26	30	3026×10=8

दिलेल्या माहितीचा हिस्टोग्राम काढा.

हिस्टोग्राम कसा काढायचा (भिन्न रुंदीच्या वर्गांसाठी):

जेव्हा वर्ग अंतरांची रुंदी समान नसते, तेव्हा आपल्याला वारंवारता घनता (Frequency Density) किंवा आयताची लांबी (Length of Rectangle) काढणे आवश्यक असते जेणेकरून आयताचे क्षेत्रफळ वारंवारतेच्या प्रमाणात असेल. यासाठी खालील सूत्र वापरले जाते:

आयताची लांबी = (वर्गाची रुंदीवारंवारता) × **किमान वर्ग रुंदी**

या प्रकरणात, किमान वर्ग रुंदी 10 आहे.

1. **एक्स -अक्ष (X-axis) वर:** 'मिळवलेले गुण' दर्शवा (10-20, 20-30, इत्यादी).
2. **वाय-अक्ष (Y-axis) वर:** 'आयताची लांबी' (गणना केलेल्या मूल्यांनुसार) दर्शवा. योग्य प्रमाण निवडा.
3. **स्तंभ काढणे:** प्रत्येक वर्ग अंतरासाठी, गणना केलेल्या 'आयताच्या लांबी'इतक्या उंचीचा आणि 'वर्गाच्या रुंदी'इतक्या एक आयताकृती स्तंभ काढा. हे स्तंभ एकमेकांना लागून असावेत. रुंदीचा